

- sis, management and information technologies]. 2012, no. 30, pp. 15–19.
4. Bikulov A. H., Zubarev A. P., Kaydalova L. V. Ierarkhicheskaya dinamicheskaya model' finansovogo rynka vblizi tochki obvala i  $p$ -adicheskiy matematicheskiy analiz [Hierarchical dynamic model of the financial market near the collapse point and  $p$ -adic mathematical analysis]. *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Seriya : Fiz.-mat. Nauki* [Bulletin of the Samara State Technical University Series : Physical and mathematical sciences]. 2006, vol. 42, pp. 135–140.
  5. Pivovarov A. S. Modelirovaniye logoperiodicheskikh kolebaniy s pomoshhyu iyerarkhicheskikh struktur [Modeling log-periodic oscillations using hierarchical structures]. *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Seriya : Fiz.-mat. Nauki* [Bulletin of the Samara State Aerospace University]. 2012, no. 2(33), pp. 266 – 273.
  6. Vladimirov V. S., Volovich I. V., Zelenov E. I.  $p$ -adicheskiy analiz i matematicheskaya fizika [p-adic analysis and mathematical physics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1994. 352 p.
  7. Didier Sornette. Kak predskazyvat' krakhi finansovykh rynkov [Why Stock Markets Crash]. Moscow, 2003. 394 p.
  8. May R. Time-delay versus stability in population models with two and three trophic levels. *Ecology*. 1973, no. 54, pp. 315–325.
  9. Lebedev A. V., Orlov U. N., Shagov D. O. Indikator optimal'noy dliny skanirovaniya nestacionarnogo vremennogo ryada [Optimal set length indicator for non-stationary time-series]. *Preprinty IPM im. V. M. Keldysha* [Preprints of the Keldysh institute of applied mathematics]. 2013, no. 17. 16 p. Available at : [http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013\\_17](http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013_17). (accessed 30.09.2018).

Поступила (received) 12.10.2018

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Гомозов Євген Павлович (Гомозов Евгений Павлович, Gomozyov Yevgen Pavlovich)** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 514-01-33; e-mail: kayaker0011@gmail.com.

**Мезерна Марина Віталіївна (Мезерная Марина Витальевна, Mezerna Maryna Vitalijivna)** – старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 386-74-22; e-mail: mezernyy@westron.kharkov.ua.

УДК 629.114.2.073.286

**А. П. КОЖУШКО, О. Л. ГРИГОР'ЄВ**

#### МОДЕЛЮВАННЯ ПОВ'ЯЗАНИХ КОЛИВАНЬ КОЛІСНОГО ТРАКТОРА ТА ЦИСТЕРНИ З РІДИНОЮ НА ПРЯМОМУ ШЛЯХУ ЗІ СКЛАДНИМ РЕЛЬЄФОМ

Наведено модель коливань колісного трактора та цистерни із рідиною, яка має вільну поверхню. Для перерозподілу рідини у цистерні, що викликаний коливаннями оболонки, використано характеристики поверхневих хвиль Релея. Знайдено спектр частот вільних механічних коливань у дозвуківому діапазоні і проаналізовано відповідні форми взаємопов'язаних рухів елементів трактора та цистерни. Виокремлено групу низькочастотних коливань, шкідливих для здоров'я тракториста, та створено уточнену математичну модель для розрахунку вимушених коливань, що виникають під час довготривалого руху по прямій дорозі. Запропоновано для математичного тестування динамічних якостей транспортного засобу описувати рельєф дороги двома гармоніками – короткою та довгою синусоїдальною хвилею. Розроблено метод визначення довжини короткої хвилі, що призводить до резонансного збільшення амплітуди коливань рідини та кабіни трактора.

**Ключові слова:** колісний трактор, цистерна, вільна поверхня рідини, механічні коливання, спектр частот, власна форма.

**А. П. КОЖУШКО, А. Л. ГРИГОРЬЕВ**

#### МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОЛЕСНОГО ТРАКТОРА И ЦИСТЕРНЫ С ЖИДКОСТЬЮ НА ПРЯМОЙ ДОРОГЕ СО СЛОЖНЫМ РЕЛЬЕФОМ

Описана модель колебаний колесного трактора и цистерны с жидкостью, имеющей свободную поверхность. Для перераспределения жидкости в цистерне, вызванного колебаниями оболочки, использованы характеристики поверхностных волн Релея. Найден спектр частот свободных механических колебаний в дозвуковом диапазоне и проанализированы формы взаимосвязанных движений элементов трактора и цистерны. Выделена группа низкочастотных колебаний, вредных для здоровья тракториста, и создана уточненная математическая модель для расчета вынужденных колебаний, возникающих при долговременном движении по прямой дороге. Предложено для математического тестирования динамики транспортного средства описывать рельеф дороги двумя гармониками – короткой и длинной синусоидальной волной. Указан метод определения длины волны, приводящей к резонансному увеличению амплитуды колебаний жидкости и кабины трактора.

**Ключевые слова:** колесный трактор, цистерна, свободная поверхность, механические колебания, спектр частот, собственная форма.

**A. P. KOZHUSHKO, A. L. GRIGORIEV**

#### MODELING OF COUPLED OSCILLATIONS OF WHEELED TRACTORS AND TANKS WITH LIQUID ON A STRAIGHT ROAD WITH DIFFICULT TERRAIN

The model describes oscillations of a wheeled tractor and a tank with liquid having free surface. For the redistribution of fluid in the tank, caused by vibrations of the shell, the characteristics of Rayleigh surface waves are used. The frequency spectrum of free mechanical vibrations in the subsonic range is found and the forms of interrelated movements of the tractor and tank elements are analyzed. A group of low-frequency oscillations harmful to the health of the tractor driver is identified, and a refined mathematical model is created to calculate the forced oscillations that occur during long-term traffic on a straight road. It is proposed for mathematical testing of vehicle dynamics to describe the road terrain by two harmonics with long and short wavelengths. A method is developed for determining the wavelength leading to the resonant increase in the amplitude of oscillations of the fluid and tractor cabin.

**Key words:** wheeled tractor, cistern, free surface, mechanical vibrations, frequency spectrum, eigenform.

© А. П. Кожушко, О. Л. Григор'єв, 2018

**Вступ, мета роботи та постановка задач дослідження.** При розробці нової або модернізації старої колісної техніки, яка використовується в сільськогосподарських угіддях, необхідно враховувати їх можливу спрямованість, тобто розподіл робіт, які виконуються. Так в господарствах сьогодні проводяться транспортні, транспортно-технологічні та технологічні операції, причому на транспортні роботи припадає близько 50 % часу.

При виконанні транспортних робіт машинно-тракторний агрегат (МТА) передусім займається перевезенням вантажу, збиральними та розподільчими роботами. Вантаж, який перевозиться, ділиться на твердий та рідкий. Оскільки перевезення рідкого вантажу призводить до виникнення його суттєвих власних коливань, які впливають на рух цистерни та колісного трактора в цілому, то розвиток цього напрямку досліджень є актуальним. При чому, не лише для сільського господарства, а й для інших галузей промисловості і транспорту. Адже це дасть змогу значно підвищити технічні та економічні показники машинно-тракторного агрегату.

Розкриттю питань впливу зміни маси на експлуатаційні показники МТА присвячені наукові праці [1 – 6]. В даних статтях автори намагаються вирішити питання стабілізації його роботи шляхом створення моделі визначення швидкості руху [1 – 3] або енергетичних втрат [4], чи питання керованості та стійкості [5 – 6]. Окремо слід виділити роботи [7 – 10], в яких автори досліджують вплив коливання рідини в автоцистерні на безпеку руху. Проте забезпечення плавності руху МТА з метою створення комфортних умов роботи тракториста в цих роботах не розглядалося.

Під час руху МТА, що перевозить цистерну з рідиною, в елементах її конструкції збуджуються різноманітні механічні та гідромеханічні коливання, які утворюють широкий спектр частот. Відомо, що на самопочуття та здоров'я людини найбільш негативний вплив чинять коливання із частотою 0.5 ... 2 Гц, які мають вертикальний напрямок (тобто, вздовж тулуба тракториста). Вимушені коливання зазначеної частоти і напряму можуть збуджувати нерівності дороги, проте їх амплітуда нівелюється дією ресор та амортизаторів кабіни й сидіння і залишається незначною. Інша ситуація виникає у разі, коли вимушені коливання резонують із власними коливаннями МТА. В роботі [13] було з'ясовано, що в цистернах із рідиною, які входять до МТА, виникають власні коливання рідини з частотами, меншими за 2 Гц. Проте ці дослідження не дають відповіді на питання, чи розповсюджуються коливання рідини з цистерни через зчпний пристрій на кабіну тракториста та його сидіння. І чи матимуть відповідні пов'язані коливання у кабіні трактора шкідливу вертикальну проекцію.

До того ж слід додати, що у МТА можуть існувати в небезпечному інтервалі часто й інші власні коливання, не викликані перетіканнями рідини. Проте, оскільки частоти поверхневих хвиль залежать від рівня рідини, а цей рівень при виконанні робіт сільськогосподарського призначення може бути довільним, то саме врахування цих хвиль породжує особливі труднощі і, одночасно, особливо великий інтерес.



а



б



в



г

Рис. 1 – Різновиди цистерн:

а – П-цистерна (з двома колісними парами); б – НП-цистерна (з двома колісними парами);  
в – П-цистерна (з трьома колісними парами); г – НП-цистерна (з трьома колісними парами).

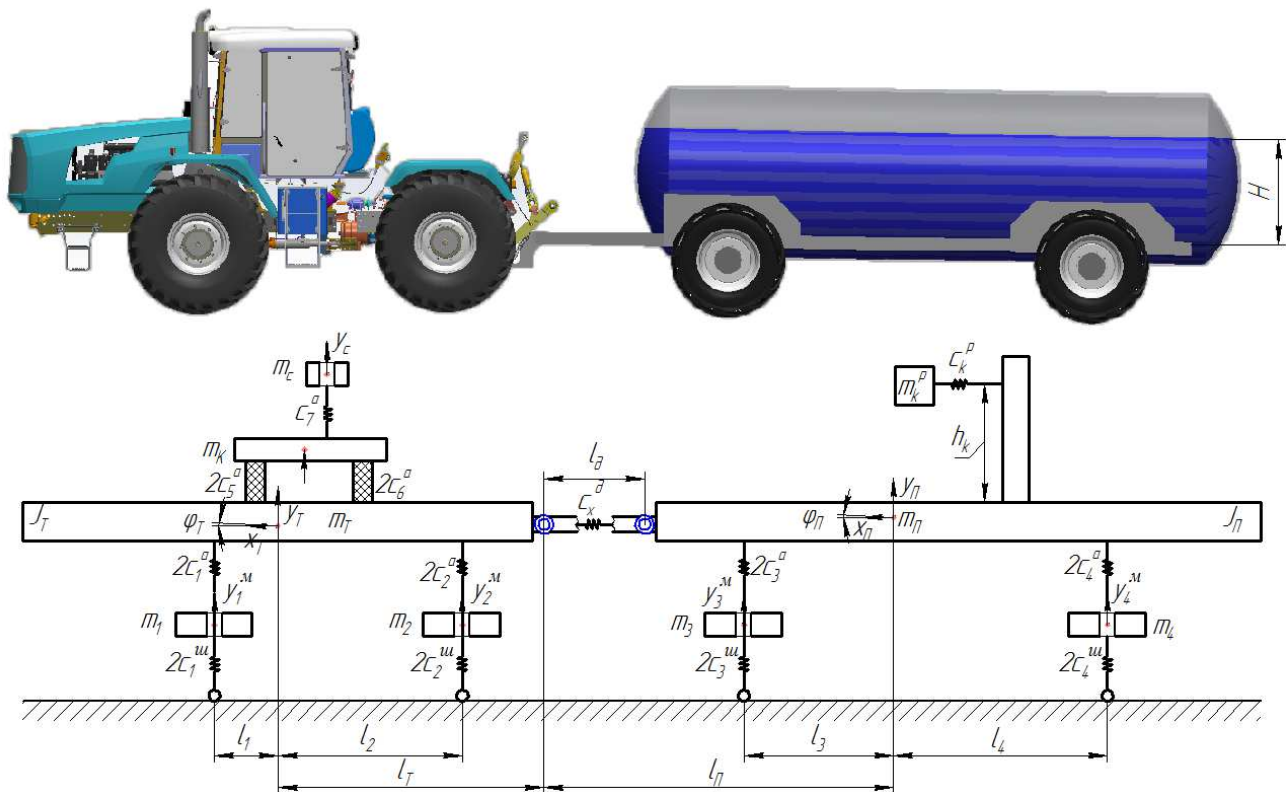


Рис. 2 – Спрощена схема машинно-тракторного агрегату з П-цистерною, яка використовується для аналізу частот вільних коливань в лінеаризованій моделі.

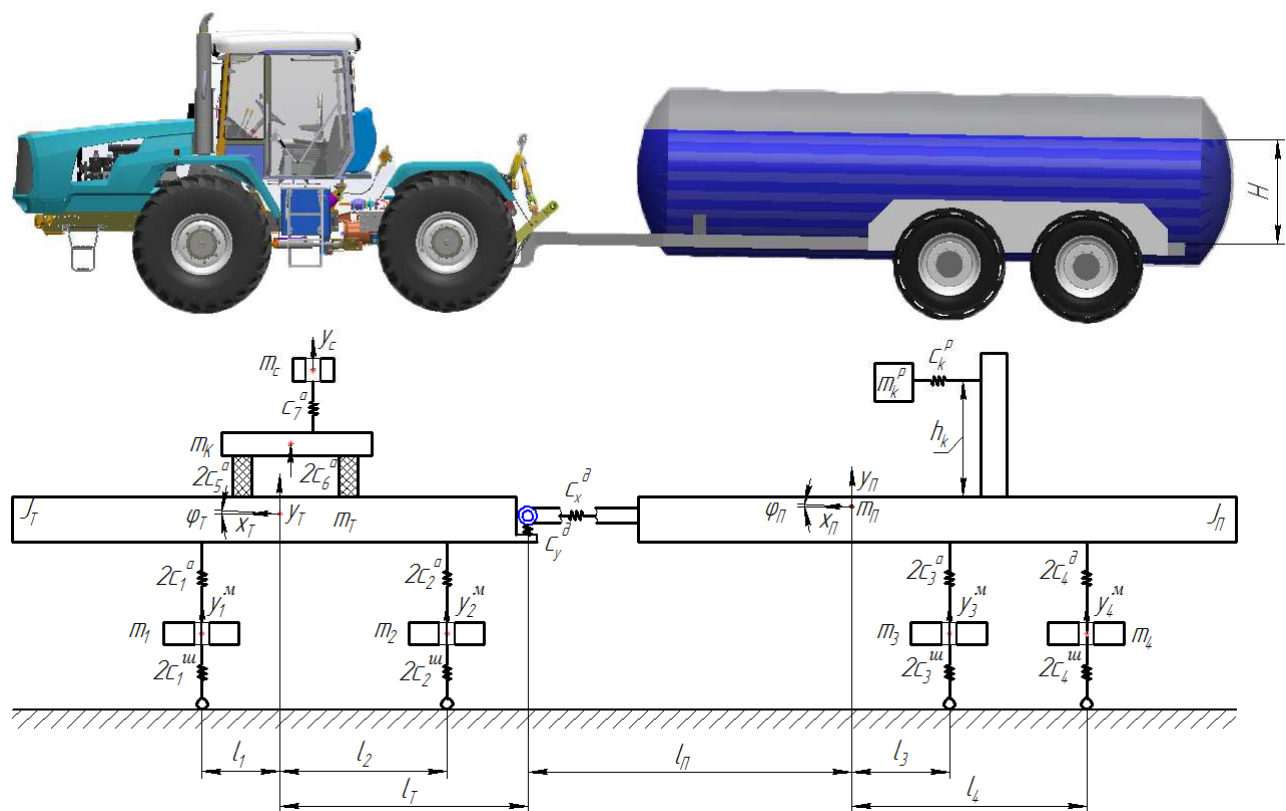


Рис. 3 – Спрощена схема машинно-тракторного агрегату з НП-цистерною, яка використовується для аналізу частот вільних коливань в лінеаризованій моделі.

В ході пошуку наукових робіт, присвячених оприлюдненню достатньо повних математичних моделей руху машинно-тракторного агрегату з цистерною, встановлено, що їх не так і багато чи не має зовсім, бо в досить

широке поле зору авторів цієї статті вони так і не потрапили. В наслідок високої складності математичного апарату, що необхідно використати для зазначеного моделювання, у відомих роботах розраховуються лише окремі складові руху МТА зі змінною масою. Таким чином, даний аналіз підкреслює вагому наукову новизну та доцільність обраної тематики досліджень.

**Метою роботи** є створення та оприлюднення відповідного математичного апарату, який дозволить провести моделювання руху колісного трактора з цистерною при виконанні транспортних робіт шляхом обчислення вертикальних, поздовжніх та кутових переміщень агрегату з урахуванням перерозподілу мас в цистерні.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі:

- проаналізувати конструкції цистерн, що використовуються в транспортних роботах на сільськогосподарських угіддях, та визначити основні вузли трактора та цистерни, динамічні характеристики яких необхідно моделювати;
- скласти лінеаризовану математичну модель власних повздовжніх коливань, яка дасть змогу оцінити наявні частоти та проаналізувати відповідні форми пов'язаних коливань МТА, і, як наслідок, виділити групу вимушених коливань, що потребує уточненого розрахунку у нелінійній постановці;
- скласти уточнені нелінійні моделі вимушених повздовжніх коливань та виконати їх динамічний аналіз на прикладі колісного трактора ХТЗ-242К та причіп-цистерни BSA KTW 16 або напівпричіп-цистерни ВНЦ-20; порівняти отримані результати.

**Аналіз конструкції цистерн. Основні рухомі елементи трактора та причепа.** Платформа цистерни будується однаково як для причепів так і напівпричепів. Зображення причіп-цистерни (скорочено – П-цистерна) та напівпричіп-цистерни (НП-цистерна) наведено на рис. 1. Основні конструктивні особливості пов'язані з їх функціональністю. Відомо, що П-цистерна є самостійним транспортним засобом без двигуна, а НП-цистерна – це різновид П-цистерн, для яких необхідна додаткова точка опори. При аналізі П-цистерн слід виділити, що вони можуть мати дві або три колісних пар, при чому у випадку трьох пар – дві розміщуються у кінці цистерни. НП-цистерни мають від однієї до трьох колісних пар і всі вони розміщуються в задній частині цистерни (тобто за її центром мас). Кількість колісних пар встановлюється в залежності від повної ваги цистерни.

При моделюванні повздовжніх коливань трактора аналізують рухи наступних елементів:

- рама трактора разом з двигуном має можливість рухатися у горизонтальному та вертикальному напрямку та обертатися в площині цих напрямів;
- два мости трактора можуть зсуватися перпендикулярно до повздовжньої осі рами, але обертаються та рухаються у напрямку цієї осі разом із нею;
- кабіна має можливість незалежно від рами трактора рухатися у горизонтальному та вертикальному напрямку та обертатися в площині цих напрямів;
- сидіння з трактористом може зсуватися перпендикулярно до повздовжньої осі кабіни, але обертається і рухається у напрямку цієї осі разом із нею;
- маховик і вали двигуна, вали й шестерні варіатора та карданної передачі, а також колеса трактора обертаються зі швидкостями, пропорційними швидкості руху контактної точки шин трактора по дорозі;
- як наслідок пружної тангенціальної піддатливості шин контактна точка може зсуватися відносно рами трактора.

При аналізі повздовжніх коливань у цистерні виокремлюються наступні динамічні елементи:

- рама разом із оболонкою та глибинною частиною рідини має можливість рухатися у двох напрямках та обертатися навколо загального центру мас;
- три поверхневі шари рідини рухаються паралельно осі цистерни, але обертаються та зсуваються перпендикулярно цієї осі разом із нею;
- кожний міст може зсуватися перпендикулярно до повздовжньої осі рами, але обертатися та рухатися у напрямку цієї осі разом із нею;
- шини на колесах всіх мостів обертаються з однаковою швидкістю, але контактна точка шин та дороги має можливість зміщуватися відносно рами цистерни, чому протидіє тангенціальна жорсткість шин.

Зв'язок коливань цистерни і трактора відбувається через сили, які діють у причіпному пристрої (*дишлі*). Перерізи дишла рухаються зі швидкостями, які визначаються рухом гака трактора та місця шарнірного (або жорсткого) з'єднання із рамою цистерни. У випадку П-цистерни маса та момент інерції дишла розподіляється між рамами трактора та цистерни порівну, а для НП-цистерни ці величини повністю приводяться до рами трактора.

Таким чином, у цьому пункті статті виконано аналіз конструкцій цистерн та основних динамічних елементів трактора та цистерни, завдяки чому стало можливо побудувати розрахункові схеми МТА з цистерною.

**Лінеаризація моделі та динамічний аналіз транспортного засобу.** При динамічному аналізі механізмів, в залежності від заданого діапазону частот, використовуються дискретні, континуальні або змішані (дискретно – континуальні) моделі. В діапазоні інфразвукових механічних коливань усі тверді або пружні елементи конструкції МТА допустимо моделювати за допомогою дискретних моделей із зосередженими параметрами, тобто системами звичайних диференціальних рівнянь. Але, як показано в роботі [13], коливання рідини у цистерні описують рівняння в частинних похідних, тобто модель поверхневих хвиль Релея на початковому рівні є континуаль-

ною, а шукана модель МТА – змішаною. Проте, як показало подальше дослідження, розв’язки континуальної моделі допустимо трактувати як рішення системи звичайних диференціальних рівнянь для так званих *парціальних осциляторів*. Кожний осцилятор – це умовний шар рідини, який зсувається впродовж вільної поверхні і взаємодіє із оболонкою шляхом натискання на бокову стінку та дно цистерни. Щоб спростити процес моделювання, умовний шар рідини допустимо вважати наявним, надавши йому конкретний розмір, масу та місце у цистерні. В [13] доведено, що для якісного моделювання досить розглянути три поверхневих шари, а усю іншу рідину вважати частиною оболонки цистерни. Таким чином, модель МТА, що використовується, є дискретною.

Перш ніж створювати складну математичну модель з урахуванням більшості факторів, які впливають на динамічну складову руху машинно-тракторного агрегату з цистерною, необхідно розробити лінійну (лінеаризовану) модель, яка буде враховувати усі відомі зв’язки між елементами та формуватися й аналізуватися при використанні матричного аналізу. Лінеаризовану модель для випадку транспортування П-цистерни (рис. 2) або НП-цистерни (рис. 3) утворюють 19 диференціальних рівняння другого порядку, тобто при русі такого транспортного засобу збуджується 19 власних частот, які відповідають групі повздовжніх коливань.

Кожне рівняння лінеаризованої моделі у точності відповідає *другому закону Ньютона* і вказує на залежність прискорення (або кутового прискорення) від діючих сил (або моментів сил). При цьому деякі нелінійні чинники (наприклад, відомі *сили Коріоліса* або другий та інші члени розкладання синуса чи косинуса у степеневі ряди) у цих рівняннях не враховані, бо вони відповідають малим складовим більшого порядку, ніж перший.

Звертаємо увагу на те, що всі блоки лінеаризованої моделі симетричні та задовольняють *третьому закону Ньютона* (сила дії дорівнює силі протидії). При формуванні лінеаризованої моделі величини *повздовжньої сили*  $R_x$  та коефіцієнтів зчеплення  $\psi_T, \psi_{\Pi}$  вважаються відомими константами, які визначено із умови квазістатичного руху агрегату (тобто без урахування коливань). Крім того, оскільки ми зараз моделюємо вільні коливання, то *усі зовнішні чинники, які збуджують вимушені, вільні та супроводжуючі коливання тут ігноруються*. Зрозуміло, що зроблені припущення притаманні лише лінеаризованій моделі, і при моделюванні вимушених коливань вони відкидаються.

При моделюванні складові величини коливального процесу об’єднуються у вигляді вектора – стовпця

$$\vec{Y} = (y_T, y_1^M, y_2^M, y_K, y_C, \varphi_T, \varphi_K, y_{\Pi}, y_3^M, y_4^M, \varphi_{\Pi}, x_1^P, x_2^P, x_3^P, x_{\Pi}, x_T, x_K, x_T^M, x_{\Pi}^M)^T, \quad (1)$$

де  $y_T, y_1^M, y_2^M, y_K, y_C$  – вертикальне переміщення остову (рами), переднього та заднього мостів, кабіни, сидіння трактора;  $\varphi_T, \varphi_K$  – кут нахилу остову трактора та кабіни;  $y_{\Pi}, y_3^M, y_4^M$  – вертикальне переміщення платформи, першого та другого мостів причіпного агрегату;  $\varphi_{\Pi}$  – кут нахилу причіпного агрегату;  $x_1^P, x_2^P, x_3^P$  – рух рідини, яка приймає участь в коливальному процесі;  $x_T, x_{\Pi}$  – повздовжній рух трактора та причіпного агрегату;  $x_K$  – повздовжній рух кабіни з сидінням;  $x_T^M, x_{\Pi}^M$  – повздовжній рух контактної точки між шинами та дорогою на передніх колесах трактора та причіпного агрегату.

Рівняння коливань загальної форми для дискретної моделі має наступний вигляд

$$M \cdot \ddot{\vec{Y}} + F \cdot \dot{\vec{Y}} + C \cdot \vec{Y} = \vec{0}; \quad (2)$$

$$M = \text{diag} (m_T, m_1, m_2, m_K, m_C, J_T, J_K, m_{\Pi} + m_P, m_3, m_4, J_{\Pi}, m_1^P, m_2^P, m_3^P, m_{\Pi} + m_3 + m_4 + m_P, m_T + m_1 + m_2, m_K + m_C, m_T^M, m_{\Pi}^M),$$

де  $M$  – це діагональна *інерційна матриця*, яка складена із мас та моментів інерції;  $F$  та  $C$  – *матриця демпфування* та *матриця жорсткості*, відповідно;  $m_T$  – маса остову трактора (разом з двигуном та, для агрегату із причепом, половиною дишла);  $m_K$  – маса кабіни;  $m_C$  – маса сидіння (разом із трактористом),  $m_{\Pi}$  – маса рами та оболонки цистерни (разом з дишлом або, для причепу, його половиною);  $m_P$  – маса глибинної частини рідини, що рухається разом із оболонкою;  $m_1^P, m_2^P, m_3^P$  – маси поверхневих шарів рідини, де відбуваються низькочастотні коливання [13];  $m_1, \dots, m_4$  – маси мостів (разом із колесами);  $m_T^M$  – сумарні обертальні маси коліс трактора та двигуна, що приведені до руху шини по дорозі,

$$m_T^M = (2J_T^K + J_M^{\text{ос}} i_{\text{тр}}^2) / r_K^2;$$

$J_T^K$  – момент інерції моста трактора;  $J_M^{\text{ос}}$  – момент інерції маховика і валів двигуна;  $i_{\text{тр}}$  – передавальне відношення трансмісії від валу двигуна до осі колеса;  $r_K$  – радіус колеса трактора;  $m_{\Pi}^M$  – сумарні обертальні маси коліс цистерни, що приведені до руху шини по дорозі;  $J_T, J_K, J_{\Pi}$  – моменти інерції при обертанні трактора (разом із мостами), кабіни (разом з трактористом) та цистерни (разом із рамою, мостами і рідиною) на кути  $\varphi_T, \varphi_K, \varphi_{\Pi}$  відносно їх центрів мас.

Відмітимо, що в лінеаризованій моделі матриця  $F$ , яка складена із коефіцієнтів внутрішнього тертя, роз-

глядатися не буде, адже задачею динамічного аналізу є знаходження резонансних частот, а коефіцієнт демпфування на величину цих частот майже не впливає, тому ним можна знехтувати.

Для того, щоб на початковому етапі перевірити складену лінеарізовану модель, достатньо переконатися у виконанні умови  $C = C^T$ ; саме ця умова відповідає третьому закону Ньютона.

На горизонтальній дорозі трактор з цистерною має нескінчену безліч положень рівноваги, оскільки при виконанні умов

$$x_{\Pi} - x_T = \text{const}, \quad x_K - x_T = 0, \quad x_T''' - x_T = 0, \quad x_{\Pi}''' - x_{\Pi} = 0; \quad x_j^p - x_{\Pi} = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

координата  $x_T$  може залишатися довільною. Тому матриця  $C$  є виродженою, і одна із частот коливань нульова.

Якщо система, що моделюється, під час руху залишається динамічне стійкою, то виконується додаткова умова  $C \geq 0$ , тоді всі власні числа цієї матриці – невід’ємні. Проте при значному від’ємному значенні сили  $R_x$  ця система може втрачати стійкість; при цьому одна із частот матриці  $C$  також становиться від’ємною, а у агрегаті спостерігається так званий *галопуючий резонанс*.

При формуванні пов’язаних форм коливань машинно-тракторного агрегату приведемо рівняння (2) до наступного вигляду:

$$M^{1/2} \frac{d^2}{dt^2} (M^{1/2} \cdot \vec{Y}) + C \cdot M^{-1/2} (M^{1/2} \cdot \vec{Y}) = \vec{0}, \quad \text{тоді} \quad \frac{d^2}{dt^2} (M^{1/2} \cdot \vec{Y}) + M^{-1/2} C \cdot M^{-1/2} (M^{1/2} \cdot \vec{Y}) = \vec{0},$$

або

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{Y}^* + C^* \cdot \vec{Y}^* = \vec{0}, \quad \text{де} \quad C^* = M^{-1/2} \cdot C \cdot M^{-1/2} > 0, \quad \vec{Y}^* = M^{1/2} \cdot \vec{Y}.$$

Звідки отримаємо рівняння для власних кутових частот  $\omega$ :

$$\det(\omega^2 I - C^*) = 0.$$

Матриці жорсткостей  $C$  для машинно-тракторного агрегату з П-цистерною (з індексом «а»), а для агрегату з НП-цистерною (з індексом «б») можуть бути наведені в блочному вигляді:

$$C = \begin{bmatrix} [C_T] & [\Theta_1] & [C_{TX}^T] \\ [\Theta_1^T] & [C_{\Pi}] & [C_{\Pi X}^T] \\ [C_{TX}] & [C_{\Pi X}] & [C_X] \end{bmatrix} + \frac{R_x}{l_o} \cdot \begin{bmatrix} [C_T^{\Psi}] & [C_{\Pi\Pi}] & [\Theta_2^T] \\ [C_{\Pi\Pi}^T] & [C_{\Pi}^{\Psi}] & [\Theta_2^T] \\ [\Theta_2] & [\Theta_2] & [\Theta_3] \end{bmatrix} + R_x \cdot \begin{bmatrix} [C_T^R] & [\Theta_1] & [\Theta_2^T] \\ [\Theta_1^T] & [C_{\Pi}^R] & [\Theta_2^T] \\ [\Theta_2] & [\Theta_2] & [\Theta_3] \end{bmatrix}; \quad (3a)$$

$$C = \begin{bmatrix} [C_T] & [\Theta_1] & [C_{TX}^T] \\ [\Theta_1^T] & [C_{\Pi}] & [C_{\Pi X}^T] \\ [C_{TX}] & [C_{\Pi X}] & [C_X] \end{bmatrix} + C_y \cdot \begin{bmatrix} [C_T^{\Psi}] & [C_{\Pi\Pi}] & [\Theta_2^T] \\ [C_{\Pi\Pi}^T] & [C_{\Pi}^{\Psi}] & [\Theta_2^T] \\ [\Theta_2] & [\Theta_2] & [\Theta_3] \end{bmatrix} + R_x \cdot \begin{bmatrix} [C_T^R] & [\Theta_1] & [\Theta_2^T] \\ [\Theta_1^T] & [C_{\Pi}^R] & [\Theta_2^T] \\ [\Theta_2] & [\Theta_2] & [\Theta_3] \end{bmatrix}, \quad (3b)$$

де квадратні блоки  $C_T$ ,  $C_T^{\Psi}$ ,  $C_T^R$ ,  $C_{\Pi}$ ,  $C_{\Pi}^{\Psi}$ ,  $C_{\Pi}^R$ ,  $C_{\Pi\Pi}$  – це матриці коефіцієнтів жорсткості, які відносяться, відповідно, до трактора, цистерни та агрегату в цілому і мають однаковий розмір  $[7 \times 7]$ ,

$$C_T = \begin{bmatrix} \sum_{j=1,2,5,6} c_j^a & -c_1^a & -c_2^a & -\sum_{j=5,6} c_j^a & 0 & c_6^a l_6 - c_5^a l_5 + G_T \psi_T & c_5^a l_5^* - c_6^a l_6^* \\ -c_1^a & c_1^a + c_1''' & 0 & 0 & 0 & -c_1''' L_1 - G_T^1 \psi_T & 0 \\ -c_2^a & 0 & c_2^a + c_2''' & 0 & 0 & c_2''' L_2 - G_T^2 \psi_T & 0 \\ -\sum_{j=5,6} c_j^a & 0 & 0 & \sum_{j=5,6,7} c_j^a & -c_7^a & c_5^a l_5 - c_6^a l_6 & c_6^a l_6^* - c_5^a l_5^* \\ 0 & 0 & 0 & -c_7^a & c_7^a & 0 & c_7^a l_7^* \\ c_6^a l_6 - c_5^a l_5 + G_T \psi_T & -c_1''' L_1 - G_T^1 \psi_T & c_2''' L_2 - G_T^2 \psi_T & c_5^a l_5 - c_6^a l_6 & 0 & \sum_{j=1,2} c_j^a L_j^2 + \sum_{j=5,6} c_j^a l_j^2 + c_x^0 H_T^2 + c_T''' h_T^2 + G_T h_T & -\sum_{j=5,6} c_j^a l_j^* l_j \\ c_5^a l_5^* - c_6^a l_6^* & 0 & 0 & c_6^a l_6^* - c_5^a l_5^* & c_7^a l_7^* & -\sum_{j=5,6} c_j^a l_j^* l_j & \sum_{j=5,6,7} c_j^a l_j^{*2} + c_x^k h_K^2 + G_K h_K \end{bmatrix};$$

$$C_{\Pi} = \begin{bmatrix} \sum_{j=3,4} c_j^a & -c_3^a & -c_4^a & G_{\Pi}\psi_{\Pi} & 0 & 0 & 0 \\ -c_3^a & c_3^a + c_3^u & 0 & -c_3^u L_3 - G_{\Pi}^3 \psi_{\Pi} & 0 & 0 & 0 \\ -c_4^a & 0 & c_4^a + c_4^u & c_4^u L_4 - G_{\Pi}^4 \psi_{\Pi} & 0 & 0 & 0 \\ G_{\Pi}\psi_{\Pi} & -c_3^u L_3 - G_{\Pi}^3 \psi_{\Pi} & c_4^u L_4 - G_{\Pi}^4 \psi_{\Pi} & \sum_{j=3,4} c_j^u L_j^2 + \sum_{k=1}^3 (c_k^p h_k^2 + G_k^p h_k) + c_x^{\partial} H_{\Pi}^2 + c_{\Pi}^u h_{\Pi}^2 + G_{\Pi} h_{\Pi} & -c_1^p h_1 - G_1^p & -c_2^p h_2 - G_2^p & -c_3^p h_3 - G_3^p \\ 0 & 0 & 0 & -c_1^p h_1 - G_1^p & c_1^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_2^p h_2 - G_2^p & 0 & c_2^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_3^p h_3 - G_3^p & 0 & 0 & c_3^p \end{bmatrix};$$

$$C_T^{\Psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_T & 0 & 0 & 0 & 0 & l_T^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C_{\Pi}^{\Psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -l_{\Pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_{\Pi} & 0 & 0 & l_{\Pi}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C_{\Pi\Pi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & l_{\Pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_T & 0 & 0 & l_T l_{\Pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C_T^R = \text{diag}(0, 0, 0, 0, 0, l_T, 0); \quad C_{\Pi}^R = \text{diag}(0, 0, 0, l_{\Pi}, 0, 0, 0);$$

квадратний блок  $C_X$  – це матриця зв'язку повздовжніх переміщень (її розмір  $[5 \times 5]$ ),

$$C_X = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^3 c_k^p + c_x^{\partial} + c_{\Pi}^u & -c_x^{\partial} & 0 & 0 & -c_{\Pi}^u \\ -c_x^{\partial} & c_x^{\partial} + c_x^{\kappa} + c_T^u & -c_x^{\kappa} & -c_T^u & 0 \\ 0 & -c_x^{\kappa} & c_x^{\kappa} & 0 & 0 \\ 0 & -c_T^u & 0 & c_T^u & 0 \\ -c_{\Pi}^u & 0 & 0 & 0 & c_{\Pi}^u \end{bmatrix};$$

$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$  – нульові матриці розмірів  $[7 \times 7]$ ,  $[5 \times 7]$  та  $[5 \times 5]$ , які вказують на відсутність силового зв'язку між відповідними групами елементів;  $C_{TX}, C_{\Pi X}$  – неквадратні матриці жорсткості зв'язку, що мають розмір  $[5 \times 7]$ ,

$$C_{TX} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_x^{\partial} H_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_K - c_x^{\partial} H_T + c_T^u h_T & -c_x^{\kappa} h_K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_K & c_x^{\kappa} h_K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_T^u h_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C_{\Pi X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \sum_{j=1}^3 (c_j^p h_j + G_j^p) - G_y - c_x^{\partial} H_{\Pi} + c_{\Pi}^u h_{\Pi} - R_y & -c_1^p & -c_2^p & -c_3^p \\ 0 & 0 & 0 & c_x^{\partial} H_{\Pi} + G_y + R_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{\Pi}^u h_{\Pi} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В цих матрицях з літери «с» починаються позначення коефіцієнтів жорсткості. А саме,  $c_1^a, c_2^a, \dots, c_7^a$  – це жорсткість у вертикальному напрямку амортизаторів чи ресор мостів трактора і цистерни, опор кабіни, сидіння водія, відповідно;  $c_1^u, c_2^u, \dots, c_4^u$  – сумарна радіальна жорсткість шин на відповідному мосту трактора або цистерни;  $c_T^u, c_{\Pi}^u$  – сумарна тангенціальна жорсткість шин трактора або причіпного агрегату, підрахована для усіх мостів разом;  $c_x^{\kappa}$  – сумарна жорсткість опор кабіни у горизонтальному напрямку;  $c_x^{\partial}, c_y^{\partial}$  – жорсткість дишла у



горизонтальному та вертикальному напрямках;  $c_1^p, c_2^p, c_3^p$  – коефіцієнти жорсткості зв'язку між шаром рідини та оболонкою цистерни, саме ці коефіцієнти використовуються у рівняннях низькочастотних коливань рідини [13]

$$m_k^p \cdot d^2 x_k^p / dt^2 + c_k^p \cdot x_k^p = c_k^p \cdot (x_{\Pi} + h_k \cdot \varphi_{\Pi}) + G_k^p \cdot \varphi_{\Pi}, \quad k = 1, 2, 3,$$

$m_k^p$  – маса  $k$ -го шару;  $G_k^p$  – сила ваги цього шару. На рис. 4 наведено графіки, що характеризують перерозподіл рідини в цистерні при коливаннях її оболонки у площині головного вертикального перерізу.

Величини, які починаються з літери « $l$ », як і на рис. 2, 3, позначають відстані у горизонтальному напрямку. Так  $l_1 - l_6$  – це відстань від центру мас трактора або цистерни до їх мостів, опор kabini, сидіння, відповідно;  $l_5^*$ ,  $l_6^*$ ,  $l_7^*$  – від центру мас kabini до її опор і сидіння;  $l_T$ ,  $l_{\Pi}$  – від точок з'єднання дишла до центру мас трактора та цистерни (для НП-цистерни точкою з'єднання є гак трактора; для П-цистерни – гак трактора і шарнір дишла на рамі причепа);  $l_d$  – це довжина дишла.

Величини  $L_1 - L_4$  – це значення плеча сили, скореговані з урахуванням тангенціальної жорсткості шини,

$$L_1 = l_1 + (G_T / C_T^u) \cdot \Psi_T, \quad L_2 = l_2 - (G_T / C_T^u) \cdot \Psi_T; \quad L_3 = l_3 + (G_{\Pi} / C_{\Pi}^u) \cdot \Psi_{\Pi}; \quad L_4 = l_4 - (G_{\Pi} / C_{\Pi}^u) \cdot \Psi_{\Pi};$$

$\Psi_T$ ,  $\Psi_{\Pi}$  – коефіцієнт зчеплення шин трактора та причепа (напівпричепа) з дорогою.

Для коліс цистерни коефіцієнт зчеплення визначається за формулою

$$\Psi_{\Pi} = \Psi_{TP} \cdot \dot{x}_{\Pi},$$

де  $\Psi_{TP}$  – це коефіцієнт в'язкого тертя, який залежить від властивостей дорожнього покриття, про що мова буде у цієї ж статті далі. Для трактора цей коефіцієнт, окрім тертя, залежить від крутного моменту двигуна (рис. 5) та передавального числа трансмісії і змінюється у достатньо широких межах, а саме:

- від від'ємного значення  $\Psi_T \approx -1$ , яке відповідає розгону при найбільшому передавальному відношенні;
- до позитивного значення  $\Psi_T = \Psi_{\Pi}$ , що відповідає руху трактора при відключеній передачі.

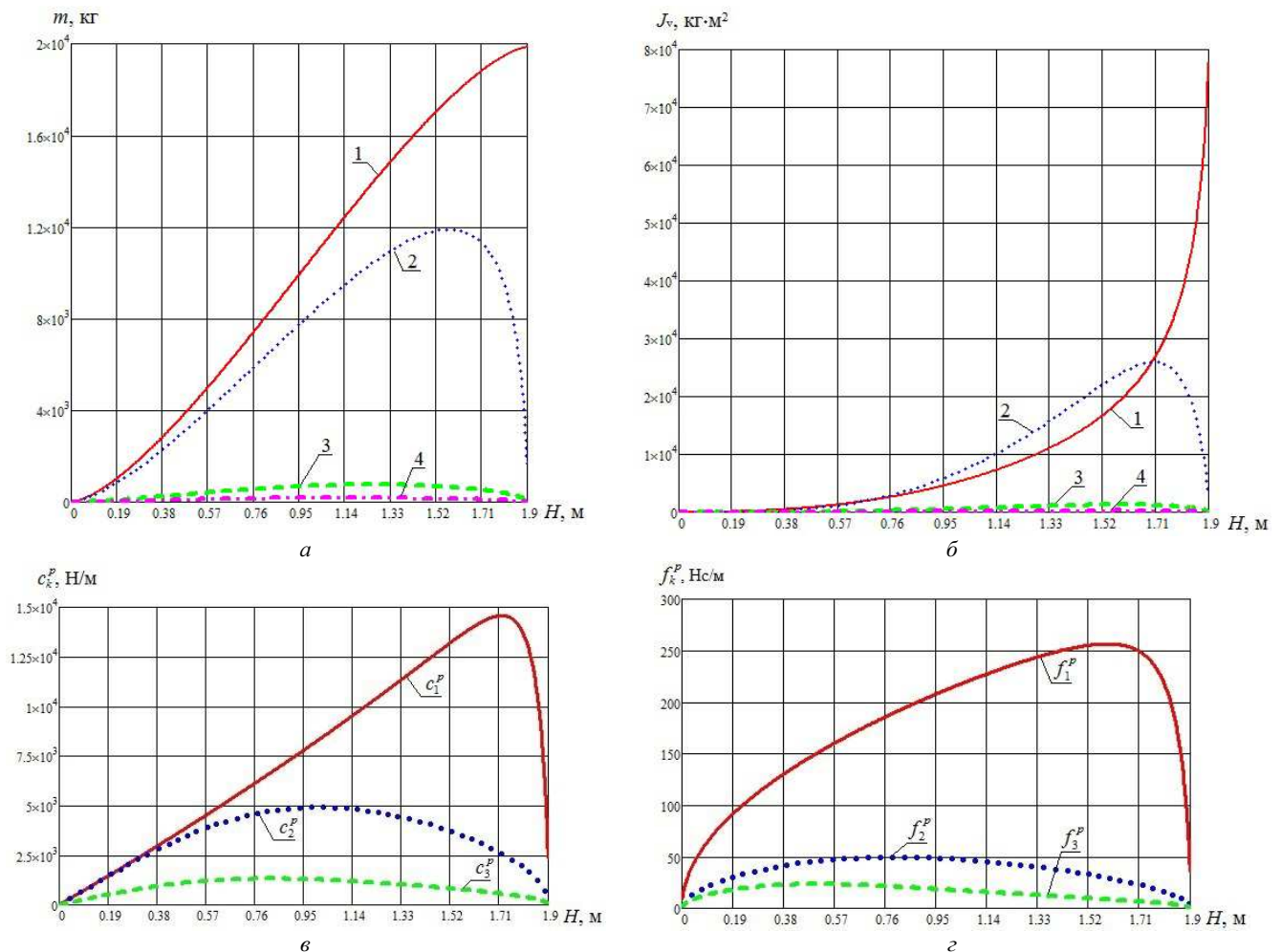


Рис. 4 – Характеристики перерозподілу рідини та діючих сил в залежності від висоти рівня рідини  $H$ :  
 $a$  – маса рідини;  $b$  – момент інерції руху рідини в цистерні;  $v$  – жорсткість;  $z$  – коефіцієнт демпфірування;  
 1 – загальна залежність; 2, 3, 4 – складові, які приймають участь в коливальному процесі  $k$ -ого осцилятора.



Величини, які починаються з літери  $h$ , позначають відстані у вертикальному напрямку. Так  $h_T, h_{\Pi}$  – це відстань від осі колеса до центру мас трактора або цистерни;  $H_T, H_{\Pi}$  – відстані від точок приєднання зчпного пристрою до центру мас трактора та цистерни (відповідні зміни відстаней для цистерни показано на рис.6);  $h_K$  – від центру мас кабіни до її опор;  $h_k, k = 1, 2, 3$  – це відстань між центрами мас  $k$ -го шару рідини та цистерни.

Літерою « $G$ » позначено сили ваги. Так  $G_T, G_{\Pi}, G_K$  – це сила ваги трактора (разом із кабіною), причепа чи напівпричепа (разом із рідиною), кабіни трактора (разом із сидінням та трактористом);  $G_T^1, G_T^2, G_{\Pi}^3, G_{\Pi}^4$  – частки ваги, які навантажують відповідний міст;  $R_y$  – вертикальна сила, що діє на гак трактора.

При моделюванні повздовжніх коливань МТА з причіп-цистерною вертикальна сила  $R_y = 0$ , а жорсткість  $c_y > 0$  (її конкретне значення надано у табл. 1); для напівпричепа жорсткість  $c_y = 0$ , а сила знаходиться за формулою

$$R_y = G_T + G_{\Pi} - \frac{G_T \cdot l_T}{l_T + 0.5(l_1 - l_2)} - \frac{G_{\Pi} \cdot l_{\Pi}}{l_{\Pi} + 0.5(l_4 - l_3)}.$$

Величини  $G_j^p = (g + a_{ц.б.}) \cdot m_j^p$ , як це вказано раніше, позначають силу ваги  $j$ -го шару рідини;  $g$  – це прискорення вільного падіння;  $a_{ц.б.}$  – центробіжне прискорення, яке на опуклих ділянках дороги корегує в межах  $\pm 20$  відсотків напруження  $g$  гравітаційного поля. Коефіцієнт пропорційності  $g + a_{ц.б.}$  використовується в цій моделі при переході від маси до сили ваги і в усіх інших випадках, в тому числі у моделі низькочастотних коливань рідини у цистерні. Маса  $m_j^p$  і жорсткості  $c_j^p$  визначають частоти  $\nu_j^p$  вільних коливань рідини (рис. 7).

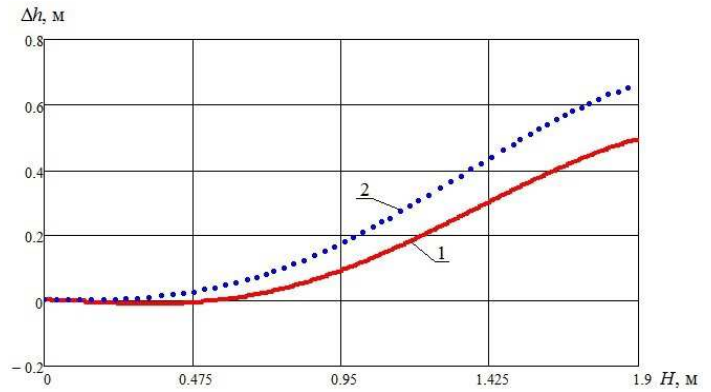
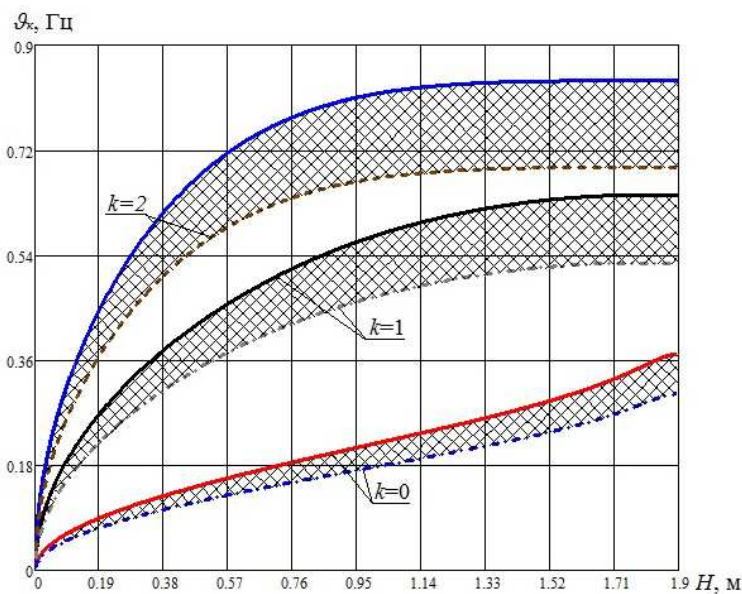
**Константи та змінні параметри математичної моделі.** Основні параметри трактора і цистерни, що були використані при проведенні динамічного аналізу МТА та під час його подальших розрахунків за нелінійною моделлю, наведено у табл. 1.

Таблиця 1 – Початкові дані для використання у математичних моделях коливального руху транспортного засобу

Максимальний крутний момент двигуна, Нм	$M_{кр}$	883	Маса остову цистерни, кг	$m_{\Pi}$	3200
Номинальна кутова швидкість двигуна, рад/с	$\omega_{ов}$	220	Маса мостів, кг	$m_{3,4}$	1400
Діапазон зміни передавального числа трансмісії	$i_{тр}$	25.8 – 110.5	Момент інерції причепа, кНм <sup>2</sup>	$J_{\Pi}$	40
Радіус колеса трактора, м	$r_K$	0.715	Жорсткість ресор причепа, кН/м	$c_{3,4}^a$	12000
Маса рами трактора, кг	$m_T$	4800	Коефіцієнт демпфірування причепа, кНс/м	$f_j$	12
Маса мостів трактора, кг	$m_{1,2}$	1450	Жорсткість шин причепа, кН/м	$c_j^u$	3.5
Маса кабіни, кг	$m_K$	1000	Коефіцієнт демпфірування шин, кНс/м	$f_j^u$	4.2
Маса сидіння з водієм, кг	$m_C$	200	Відстань від точки з'єднання зчпного пристрою до центру мас цистерни, м	$l_{\Pi}$	1.5
Момент інерції трактора, кНм <sup>2</sup>	$J_T$	20.5	Маса рідини в цистерні, т	$m_B$	0÷20
Сумарна жорсткість ресор трактора, кН/м – переднього мосту; – заднього мосту	$c_i^a$	220; 24000	Рівень рідини в цистерні, м	$H$	0 ÷ 1.9
Коефіцієнт демпфірування ресор переднього мосту, кНс/м	$f_i$	12	Декремент затухання коливань рідини		0.1
Сумарна жорсткість шин трактора, кН/м – переднього мосту; – заднього мосту	$c_i^u$	4.2; 4.2	Відстань від точки з'єднання зчпного пристрою до центру мас трактора, м	$l_T$	2.6
Сумарний коефіцієнт демпфірування шин трактора, кНс/м – переднього мосту; – заднього мосту	$f_i^u$	10.2; 10.2	Коефіцієнт в'язкого тертя: – асфальтобетон; – ґрунтова поверхня; – стерня колосових	$\psi_{тр}$	0.018; 0.03; 0.11
Повздовжня жорсткість дишла, кН/м	$c_x^o$	10000	Жорсткість дишла при згинанні у вертикального напрямку, кН/м	$c_y^o$	2000
Сумарна жорсткість опор кабіни у вертикальному напрямку, кН/м – передніх; – задніх	$c_i^a$	10	Сумарний коефіцієнт демпфірування опор у вертикальному напрямку, кНс/м – передніх; – задніх	$f_i$	1
Сумарна жорсткість опор сидіння у вертикальному напрямку, кН/м	$c_7^a$	1	Сумарний коефіцієнт демпфірування опор сидіння у верт. напрямку, кНс/м	$f_i$	0.9



Рис. 5 – Зовнішні характеристики двигуна.

Рис. 6 – Зміщення центру мас цистерни в залежності від рівня води:  
1 – без врахування усадки коліс цистерни;  
2 – з врахування усадки коліс цистерни.Рис. 7 – Залежність власних частот коливань рідини від висоти рівня  $H$  та центробіжного прискорення (вказано межу змін).

Таблиця 2 – Значення резонансних частот

Номер гармоніки	Частота $\nu$ , Гц	
	П-цистерна	НП-цистерна
0	0	0
1	0.27	0.27
2	0.34	0.34
3	0.54	0.54
4	0.57	0.58
5	0.72	0.72
6	0.76	0.76
7	0.86	1.02
8	1.21	1.02
9	1.32	1.35
10	1.58	1.53
11	3.96	1.69
12	4.99	4.24
13	6.26	4.99
14	6.93	6.92
15	12.56	12.56
16	21.09	21.09
17	22.33	22.32
18	22.61	22.59

Змінні параметри лінеаризованої моделі залежать від рівня рідини у цистерні (рис. 4), швидкості і прискорення руху МТА, передавального відношення, властивостей дорожнього покриття. Якщо МТА рухається без прискорення, а двигун працює на режимах зовнішньої швидкісної характеристики (рис. 5), що при сталому значенні коефіцієнта тертя  $\psi_{\text{ТР}}$  визначає передавальне відношення  $i_{\text{ТР}}$  як функцію швидкості руху  $\dot{x}_{\text{П}}$  та ваги  $G_{\text{П}}$  цистерни, то ці параметри пов'язані наступними співвідношеннями:

$$R_x = \Psi_{\text{П}} \cdot G_{\text{П}}; \quad \Psi_{\text{Т}} = -\Psi_{\text{П}} \cdot (G_{\text{Т}} / G_{\text{П}}).$$

Такий режим далі називатимемо *характерним*; на ньому рейка паливного насоса дизеля є притисненою до упору і тому коливання кутової швидкості обертання колінчастого валу не впливає на крутний момент двигуна. На характерних режимах трактора ХТЗ-242К та П-цистерни BSA KTW 16 або НП-цистерни ВНЦ-20 виконується умова  $\Psi_{\text{П}} \in [0.1; 0.2]$ .

**Порядок проведення та результати динамічного аналізу МТА.** Використовуючи для характерного режиму складену лінеаризовану модель та конкретні значення параметрів для конструкції МТА з причепами двох типів отримуємо розподіли власних (резонансних) частот (табл. 2) при рівні рідини в цистерні  $H = 1.5$  м (даний рівень обумовлено значенням максимального перерозподілу [13]). З'ясовано наявність чотирьох груп коливань.

*Високі частоти* – ця група має резонансні частоти, які перевищують 20 Гц; таких в системі є три. Вони передусім залежать від величини жорсткості амортизаторів заднього мосту трактора і мостів цистерни.

*Середні частоти* – група має частоти, які знаходяться в діапазоні від 2 до 20 Гц. Ці частоти залежать від коефіцієнтів жорсткості переднього моста трактора і дишла, а також передавального відношення варіатора.

*Низькі частоти* – група, яка складається з частот від 0.5 до 2 Гц. Саме ці коливання суттєво впливають на плавність руху, самопочуття тракториста, тому вони викликають найбільший інтерес.

*Найнижчі частоти* – в цю групу входять коливання, які мають частоти від 0 Гц (невизначеність рівноваги) до 0.5 Гц; для здоров'я людини вони є небезпечними.

Кожній частоті із табл. 2 відповідає форма власних коливань; форми для низьких частот наведено у табл. 3, 4. Нагадаємо, що коефіцієнти кожної ( $k$  – тої) власної форми було нормовано у відповідності до правила

$$\vec{Y}_j^* = M^{1/2}_{j,j} \cdot \vec{Y}_j, \quad j = 0, 1, \dots, 18.$$

Якщо тепер утворити суми

$$T_k = 0.5 \cdot A_k^2 \cdot \omega_k^2 \cdot \sum_{j=0}^{18} (\vec{Y}_j^*)^2,$$

де  $A_k$ ,  $\omega_k = 2\pi \cdot \nu_k$  – амплітуда та кругова частота коливань, то ці суми відповідатимуть кінетичній енергії коливання. Тому сума квадратів координат  $\vec{Y}_j^*$  дорівнює 1, а таке нормування називають *енергетичним*.

Жирним шрифтом в табл. 3, 4 показані максимальні значення, які свідчать про найбільший вплив складової на загальний коливальний процес. Оцінюючи значення складових гармонік, найбільш важливими для машинно-тракторного агрегату з П-цистерною є гармоніки № 6, 7, а з НП-цистерною – № 7, адже вони відповідатимуть досить тісному зв'язку між шкідливими коливаннями кабіни та рухами рідини у цистерні.

Таблиця 3 – Компоненти нормованих власних форм коливань для причіп-цистерни

Номер	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\nu$	<b>0</b>	<b>0.27</b>	<b>0.34</b>	<b>0.54</b>	<b>0.57</b>	<b>0.72</b>	<b>0.76</b>	<b>0.86</b>	<b>1.21</b>	<b>1.32</b>	<b>1.58</b>
$y_T$	0	0.01	0.02	-0.01	0	0.14	0.01	0.16	<b>0.69</b>	<b>-0.43</b>	0.09
$y_1^M$	0	0.03	0	0.01	-0.02	-0.03	-0.04	-0.2	0	-0.06	-0.04
$y_2^M$	0	0	0.01	-0.01	0	0.06	0.01	0.07	<b>0.29</b>	-0.18	0.04
$y_K$	0	0	0.14	-0.01	0	<b>0.97</b>	-0.05	-0.14	-0.13	0.06	-0.01
$y_C$	0	-0.01	<b>0.99</b>	-0.02	-0.01	-0.15	0	0	0	0	0.02
$\varphi_T$	0	0.09	-0.01	0.03	-0.07	-0.12	-0.12	<b>-0.62</b>	-0.21	-0.03	<b>-0.13</b>
$\varphi_K$	0	0.01	-0.03	-0.06	-0.04	-0.02	-0.03	-0.16	-0.09	-0.02	<b>0.98</b>
$y_{\Pi}$	0	0.02	0	0.01	-0.02	-0.02	-0.06	-0.42	0.58	<b>0.57</b>	-0.01
$y_3^M$	0	0.01	0	0	-0.01	-0.01	-0.02	-0.1	0.14	0.14	0
$y_4^M$	0	0.01	0	0	-0.01	-0.01	-0.02	-0.1	0.14	0.14	0
$\varphi_{\Pi}$	0	-0.11	0	-0.02	0.08	0.03	0.12	<b>0.48</b>	-0.04	<b>0.64</b>	0.1
$x_1^P$	<b>0.54</b>	<b>-0.83</b>	-0.01	0.05	-0.01	-0.01	-0.03	-0.1	0	-0.05	-0.01
$x_2^P$	0.14	0.08	0	<b>-0.3</b>	<b>0.93</b>	-0.01	-0.02	-0.1	0	-0.04	0
$x_3^P$	0.06	0.03	0	-0.03	-0.02	0.03	<b>0.98</b>	-0.19	0	-0.03	0
$x_{\Pi}$	<b>0.57</b>	<b>0.35</b>	0	-0.13	-0.14	0	-0.04	0.08	0	0.05	-0.01
$x_T$	<b>0.53</b>	<b>0.34</b>	0	-0.12	-0.14	0	-0.04	0.05	0	0.01	-0.01
$x_K$	0.17	0.16	0.02	<b>0.93</b>	<b>0.26</b>	0.01	0.02	0.02	0	0	0.07
$x_T^M$	0.21	0.13	0	-0.05	-0.05	0	-0.02	0.02	0	0	0
$x_{\Pi}^M$	0.1	0.06	0	-0.02	-0.02	0	-0.01	0.02	0	0.02	0

Таблиця 4 – Компоненти нормованих власних форм коливань для напівпричіп-цистерни

Номер	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\nu$	<b>0</b>	<b>0.27</b>	<b>0.34</b>	<b>0.54</b>	<b>0.58</b>	<b>0.72</b>	<b>0.76</b>	<b>1.02</b>	<b>1.02</b>	<b>1.35</b>	<b>1.53</b>	<b>1.69</b>
$y_T$	0	0	-0.02	-0.01	0	0.14	0	<b>-0.42</b>	0.28	-0.06	<b>0.56</b>	<b>-0.5</b>
$y_1^M$	0	0	0	0.01	0	-0.02	0	0.18	-0.11	-0.01	0.14	-0.28
$y_2^M$	0	0	-0.01	-0.01	0	0.06	0	-0.18	0.12	-0.03	<b>0.23</b>	-0.2
$y_K$	0	0	-0.14	-0.01	0	<b>0.97</b>	0	0.15	-0.1	0.01	-0.06	0.04
$y_C$	0	0	<b>-0.99</b>	-0.02	0	-0.15	0	0	0	0	0.02	0.01
$\varphi_T$	0	0	0.02	0.03	0.01	-0.1	0	<b>0.63</b>	<b>-0.4</b>	-0.01	0.18	<b>-0.52</b>
$\varphi_K$	0	0	0.03	-0.07	-0.02	-0.02	0	0.2	-0.13	-0.01	<b>0.76</b>	<b>0.6</b>

Продовження таблиці 4												
$y_{\Pi}$	0	-0.03	0	0	0.03	0	0.03	<b>0.47</b>	0.7	<b>-0.43</b>	-0.03	0.02
$y_3^u$	0	-0.01	0	0	0.01	0	0.01	0.12	0.17	-0.1	-0.01	0.01
$y_4^u$	0	-0.01	0	0	0.01	0	0.01	0.11	0.17	-0.11	-0.01	0.01
$\varphi_{\Pi}$	0	-0.11	0	0	0.08	0	0.07	0.22	<b>0.38</b>	<b>0.88</b>	0.04	-0.03
$x_1^p$	<b>0.54</b>	<b>-0.83</b>	0	0.04	-0.01	0	-0.01	-0.03	-0.06	-0.07	0	0
$x_2^p$	0.14	0.08	0	<b>-0.26</b>	<b>0.95</b>	0	-0.01	-0.03	-0.05	-0.05	0	0
$x_3^p$	0.06	0.03	0	-0.03	-0.02	0	<b>0.99</b>	-0.03	-0.05	-0.04	0	0
$x_{\Pi}$	<b>0.57</b>	<b>0.36</b>	0	-0.13	-0.14	0	-0.05	0.03	0.05	0.07	-0.01	-0.01
$x_T$	<b>0.53</b>	<b>0.34</b>	0	-0.12	-0.13	0	-0.05	0.01	0.02	0.01	-0.01	-0.01
$x_K$	0.17	0.15	-0.02	<b>0.94</b>	0.22	0.01	0.02	-0.01	0	0	0.05	0.05
$x_T^u$	0.21	0.13	0	-0.05	-0.05	0	-0.02	0.01	0.01	0	0	0
$x_{\Pi}^u$	0.1	0.06	0	-0.02	-0.02	0	-0.01	0.01	0.01	0.02	0	0

В процесі розрахунку отримуємо залежності власних (резонансних) частот від значення поздовжньої сили  $R_x$ , що діє на пристрій (рис. 8, 9), та від рівня рідини  $H$  (рис. 10, 11).

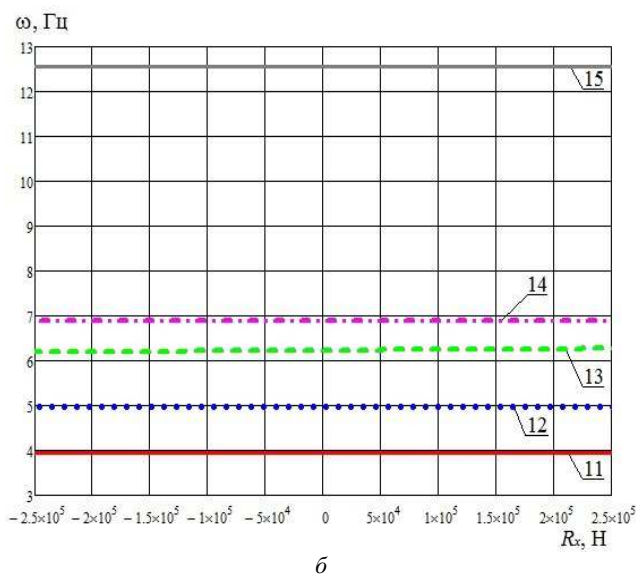
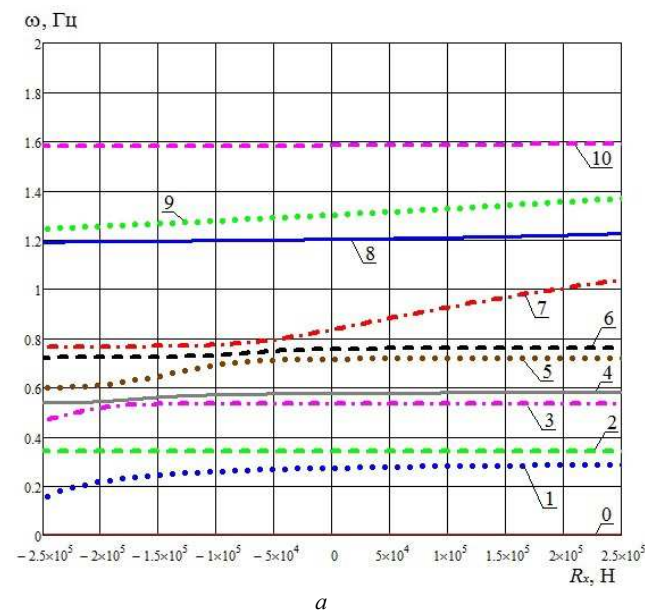


Рис. 8 – Залежність власних (резонансних) частот від поздовжньої сили  $R_x$  для агрегату з П-цистерною (а, б).

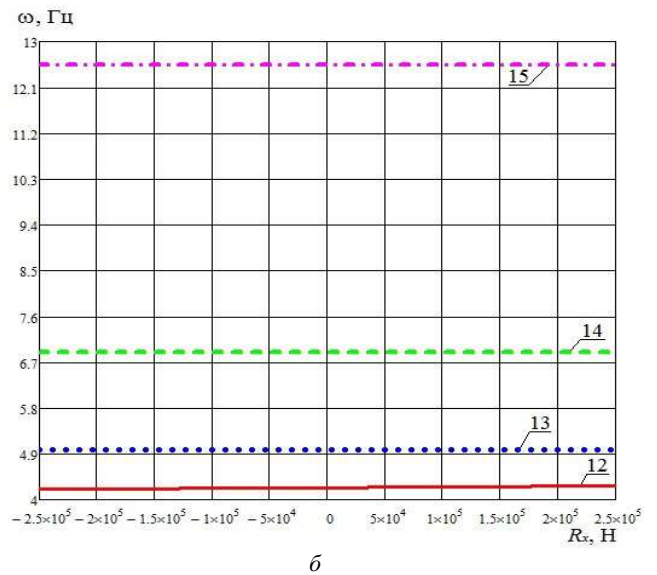
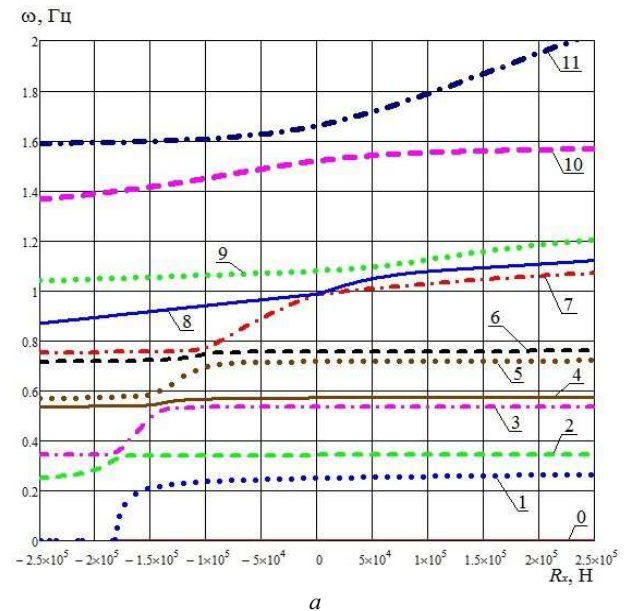


Рис. 9 – Залежність власних частот від поздовжньої сили  $R_x$  для агрегату з НП-цистерною (а, б).

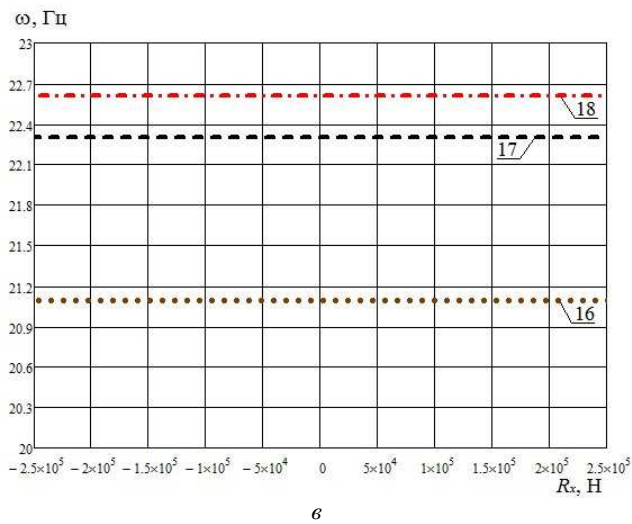


Рис. 8 – Залежність власних (резонансних) частот від поздовжньої сили  $R_x$  для агрегату з П-цистерною (б).

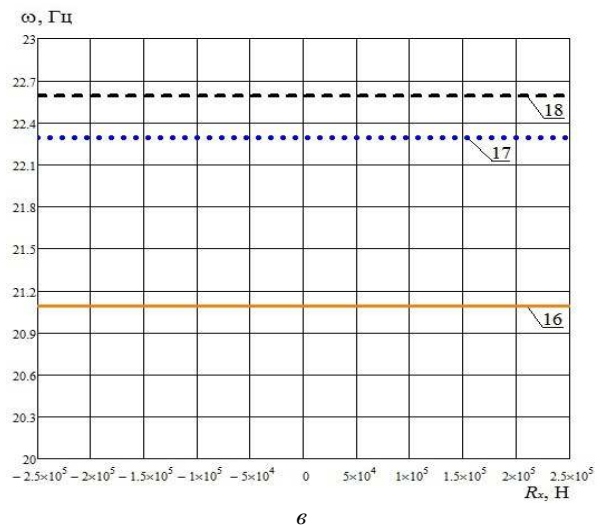


Рис. 9 – Залежність власних частот від поздовжньої сили  $R_x$  для агрегату з ПП-цистерною (б).

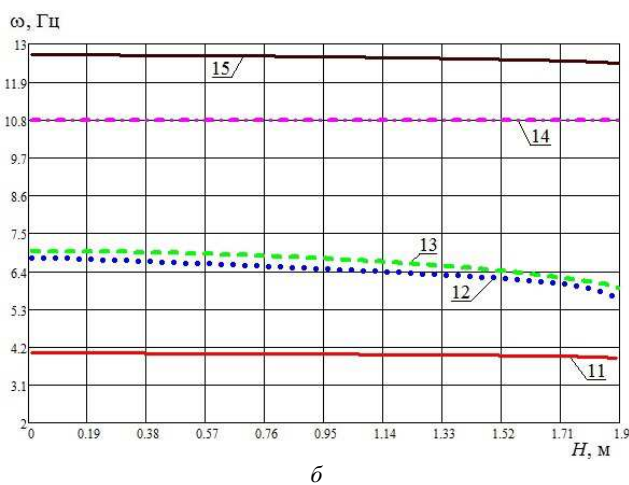
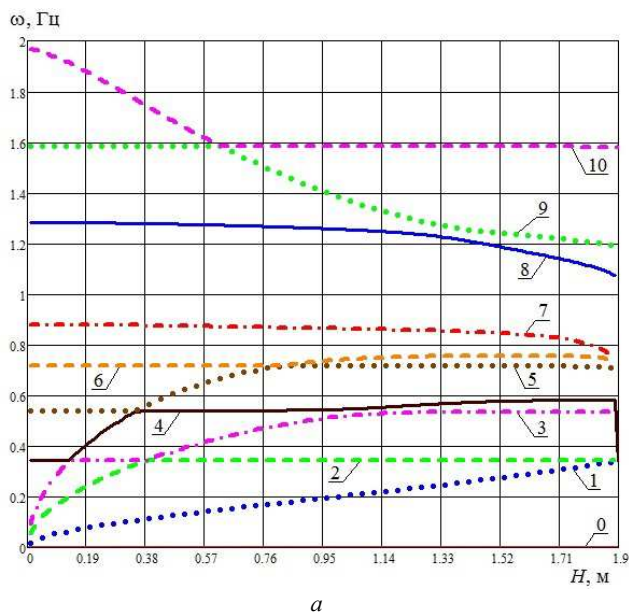


Рис. 10 – Залежність власних частот від рівня рідини  $H$  в агрегаті з П-цистерною (а, б).

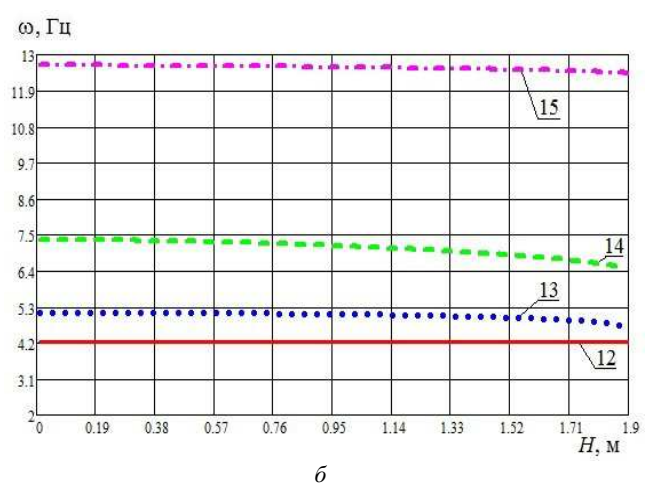
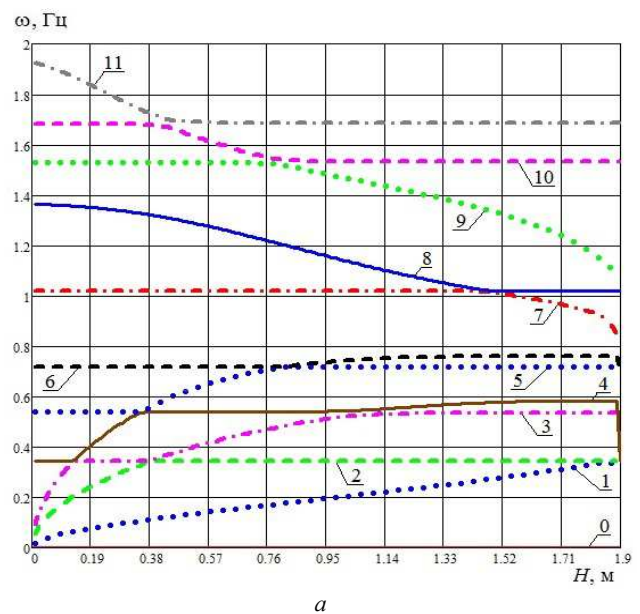


Рис. 11 – Залежність власних частот від рівня рідини  $H$  в агрегаті з ПП-цистерною (а, б).



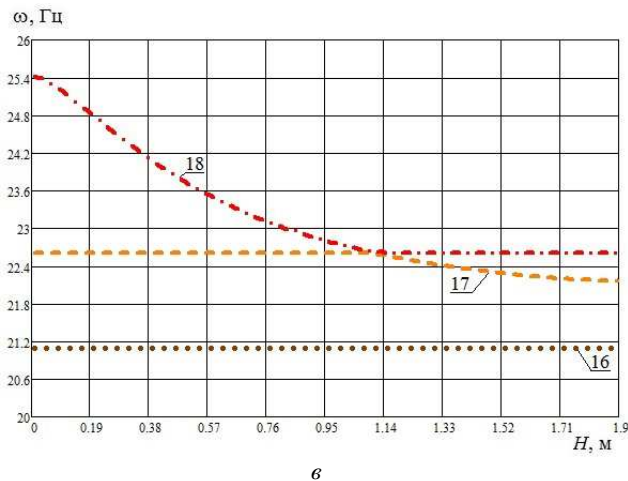


Рис. 10 – Залежність власних частот від рівня рідини  $H$  в агрегаті з П-цистерною ( $\epsilon$ ).

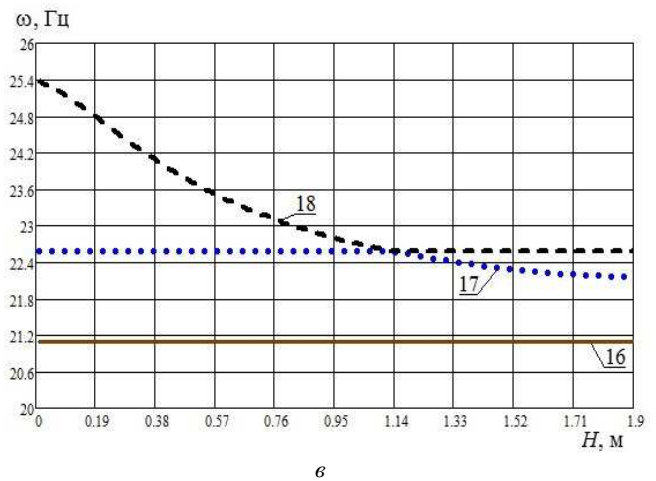


Рис. 11 – Залежність власних частот від рівня рідини  $H$  в агрегаті з НП-цистерною ( $\epsilon$ ).

Аналізуючи отримані залежності, зробимо висновок про те, що поздовжня сила  $R_x$ , що діє на пристрій, слабо впливає на власні (резонансні) частоти коливань МТА, на відміну від рівня рідини  $H$ , який має істотний вплив на частоти. Порівнюючи результати з рис. 4, 5, встановимо, що сила  $R_x$  забезпечує більшу зміну характеристик коливань у випадку транспортування НП-цистерни, ніж П-цистерни.

При русі МТА по дорозі зі складним рельєфом на нього у різні проміжки часу діє тягова сила ( $R_x > 0$ ) та сила, що штовхає ( $R_x < 0$ ). В першому випадку коливальна система має 3 (№ 7 – 9) змінні гармоніки для П-цистерни та 7 (№ 7 – 12) – для НП-цистерни. При виникненні від'ємної сили коливальна система має 6 (№ 1, 3, 5, 6, 8, 9) змінних гармонік для П-цистерни та 12 (№ 1 – 12) – для НП-цистерни. Така тенденція свідчить про якісний й кількісний вплив перерозподілу мас рідини на трактор через поздовжню силу  $R_x$ .

На рис. 8, 9, а можливо помітити виникнення динамічної нестійкості, коли частоти перетинають нульову лінію, після чого стають уявними величинами, а замість гармонічних розв'язків ми отримаємо експоненти. Як бачимо, це виникає явище галоупуючого резонансу у вертикальній площині, яке спостерігається при значному від'ємному значенні сили  $R_x$ , що відповідає руху МТА з гори під значним кутом. Фактори, які впливають на це явище, проаналізовано на рис. 12; зменшення жорсткості шини виникає при недостатньому тиску повітря у камері, а зазначені зміни коефіцієнтів зчеплення шин з дорогою відбуваються під час експлуатації транспортного засобу. При моделюванні результатів, які наведено на рис. 8, рівень рідини в цистерні був обраний максимальним, бо, як з'ясовано,

*коливання рідини у цистерні на границю динамічної стійкості не впливають.*

Як свідчать ці дані, МТА із НП-цистерною може стійко рухатися при більш значних нахилах дороги, ніж МТА із П-цистерною. Крім того, у випадку П-цистерни на границю динамічної стійкості суттєвий вплив чинить місце розміщення рухомої вісі шарніра на рамі цистерни, а саме відстань  $l_{II}$ . І, як виявилось за результатами дослідження,

*вісь шарніра доречне розміщувати не з краю, а значно ближче до центру мас рами.*

Окремо слід виділити те, що графіки частот, які спостерігаються на рис. 8, 9 не перетинаються та мають зламанний вигляд, а на рис. 10, 11 вони перетинаються. До того, при наближенні спектральних значень одне до одного, спостерігається своєрідна «взаємодія» відповідних гармонік (наприклад, гармоніки 3 і 4 у табл. 2 або 7 і 8 у табл. 3). Це свідчить про такі особливості руху спектру у пучках лінійних операторів [16, 17], які потребують додаткового теоретичного дослідження.

**Рекомендації щодо спрощення розрахункової моделі.** На основі аналізу результатів динамічного аналізу встановлено можливість і доречність цілої низки спрощень математичної моделі. Перелічимо їх із додаванням необхідних пояснень.

Маса заднього моста об'єднується з остовом (рамою) трактора, а мостів причіпного агрегату з його платформи. При цьому жорсткість мостів приводиться до жорсткості шин за правилом обернених величин, а саме:

$$1/c_{\Sigma} = 1/c_1 + 1/c_2.$$

Коливання рам трактора та цистерни (разом з їхніми мостами) у горизонтальному напрямку вважаються синфазними, тобто поздовжня податливість дишла приймається нескінченно великою, і відповідний силовий зв'язок змінюється на кінематичний. Зауважимо, що об'єднання не стосується горизонтального руху кабіни і сидіння, які і надалі розглядаються як окрема маса.



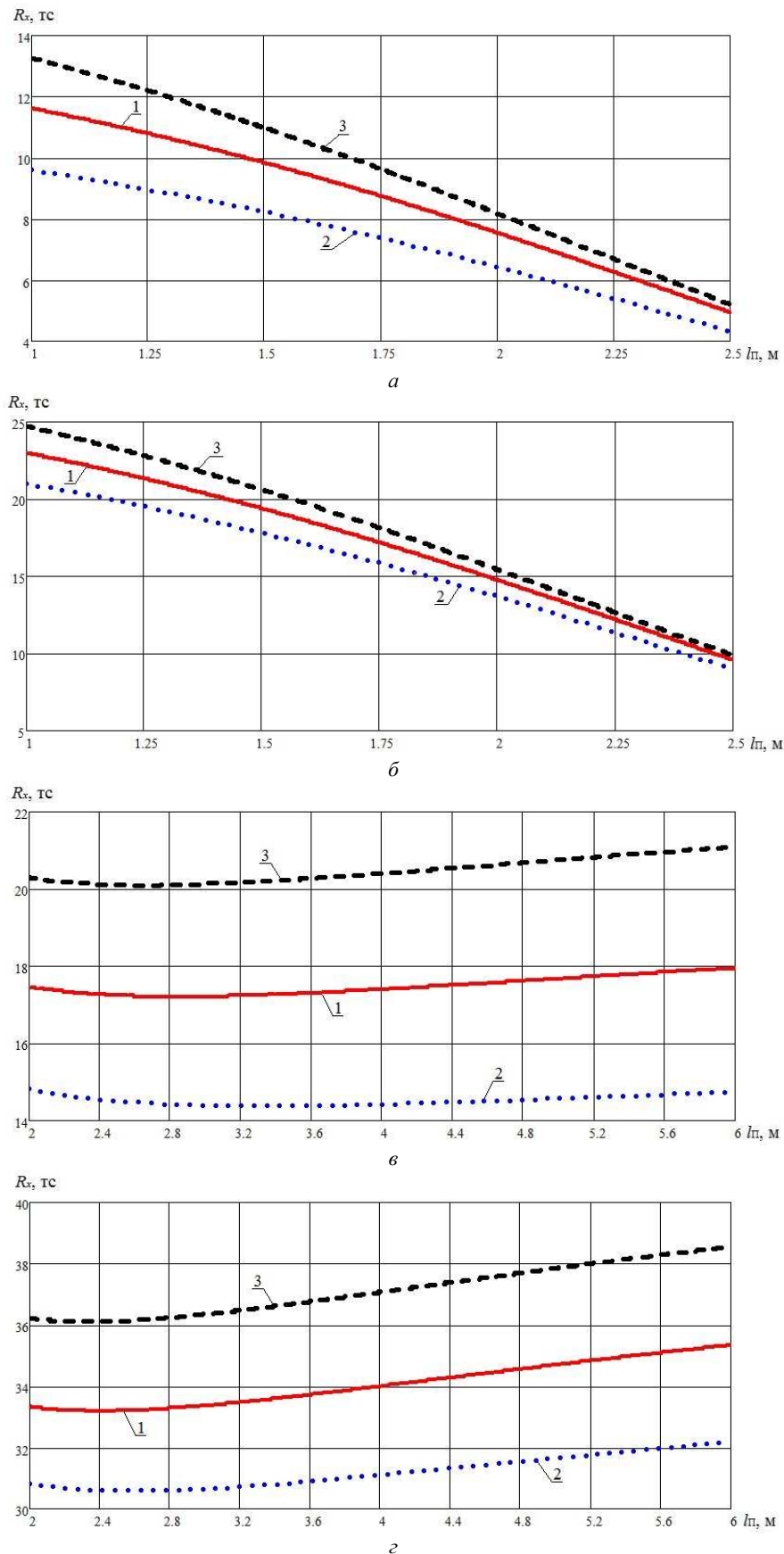


Рис. 12 – Залежність граничної динамічної стійкості по повздовжній складовій силі від розміщення шарніра в причіпному агрегаті:  
*a*, *б* – для причіп-цистерни; *в*, *г* – для напівпричіп-цистерни; *a*, *в* – при 50 % від значення стандартної жорсткості шин;  
*б*, *г* – стандартна жорсткість шин; 1 –  $\psi_T = 0$  та  $\psi_{\Pi} = 0$ ; 2 –  $\psi_T = 0.5$  та  $\psi_{\Pi} = -0.5$ ; 3 –  $\psi_T = -0.5$  та  $\psi_{\Pi} = -0.5$ .

Тангенціальною податливістю шин та крутильною податливістю елементів трансмісії можливо знехтувати, що дає змогу привести момент інерції двигуна та шин до інерційних мас трактора (рис. 13) та причепа.

У моделі рідини третім поверхневим шаром, в наслідок його малої маси (рис. 5), можна знехтувати, і об'єднати відповідну масу із масою оболонки цистерни.

У випадку дослідження МТА з НП-цистерною показник жорсткості  $c_y^0$  можна вважати нескінченно великим, і у математичній моделі замінити відповідний силовий зв'язок на кінематичний.

Як наслідок зроблених та втілених рекомендацій, кількість динамічних параметрів, що моделюються диференціальними рівняннями другого порядку, скорочується з 19 до 11, і це число добре відповідає кількості низькочастотних гармонік, які були наведені у табл. 2, 3.

Зауважимо, що динамічний аналіз спрощеної моделі можливо проводити за допомогою тих самих матриць (3), якщо відповідні коефіцієнти жорсткості зв'язку між масами, що об'єднуються, збільшити на декілька порядків. Дослідження довело, що після вказаної трансформації група низьких частот практично не змінюється.

**Розрахункові схеми нелінійних моделей.** Для комплексного формування математичної моделі руху вертикальних, поздовжніх та кутових переміщень колісного трактора з цистерною необхідно побудувати розрахункові схеми з виділенням основних складових, які діють при русі по нерівній поверхні. Зауважимо, що як наслідок конструкції з'єднання дишла та крюка трактора, нерівності профілю дороги у поперечному напрямі призводять до відокремлених коливань трактора або цистерни, тобто коливання рідини на плавність руху трактора (яку розуміють у сенсі збереження здоров'я тракториста) не впливають. Тому під нерівностями шляху у цій роботі ми будемо розуміти їх миттєві середні значення для лівого та правого колеса на кожному із чотирьох мостів окремо; саме ці фактори збуджують пов'язані коливання, і для їх аналізу достатньо застосовувати так звані *велосипедні розрахункові схеми*, які й показано на рис. 13, 14.

Інша схема збудження пов'язаних коливань діє при повороті транспортного засобу. Проте, на відміну від нерівностей, під час руху повороту зустрічаються епізодично, а в паузах збуджені ними коливання затухають. Тому аналіз пов'язаних коливань трактора і цистерни з рідиною, які збуджуються під час поворотів шляху, буде досліджено у іншій публікації.

Оскільки дана стаття спрямована на формування комплексної оцінки пов'язаних коливань колісного трактора та цистерни, то цілком доцільно наводити математичний апарат, розбивши всі складові на групи. Тобто, розглядати окремо вертикальні, поздовжні та кутові переміщення остова, кабіни, сидіння трактора, а також платформу цистерни та рідини, що знаходиться в ній. При цьому, оскільки кути передачі зусилля між трактором і причепом є малими, поздовжні коливання більшості зосереджених мас (корпусів трактора і цистерни, мостів і шин, але не рідини у цистерні або кабіни з сидінням) припустимо вважати синфазними.

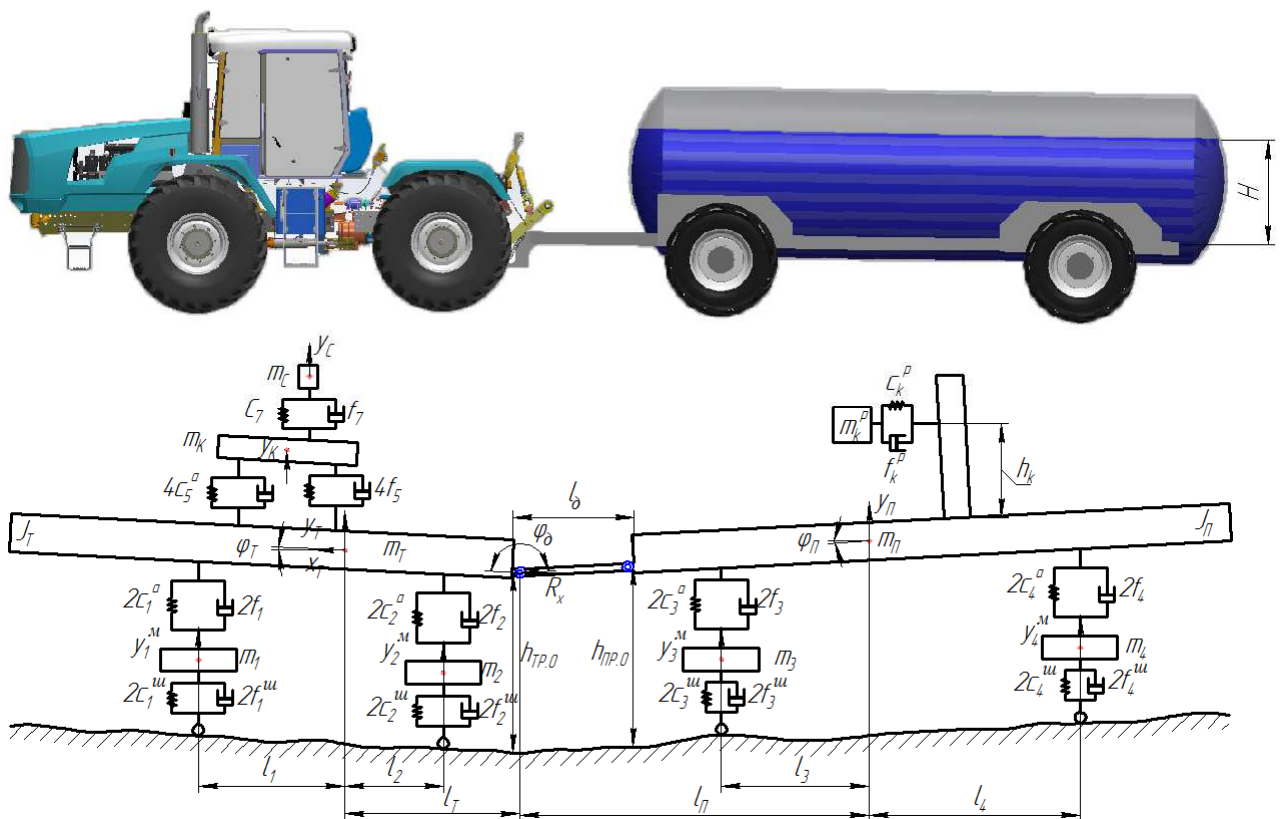


Рис. 13 – Розрахункова схема П-цистерни з двома колісними парами.

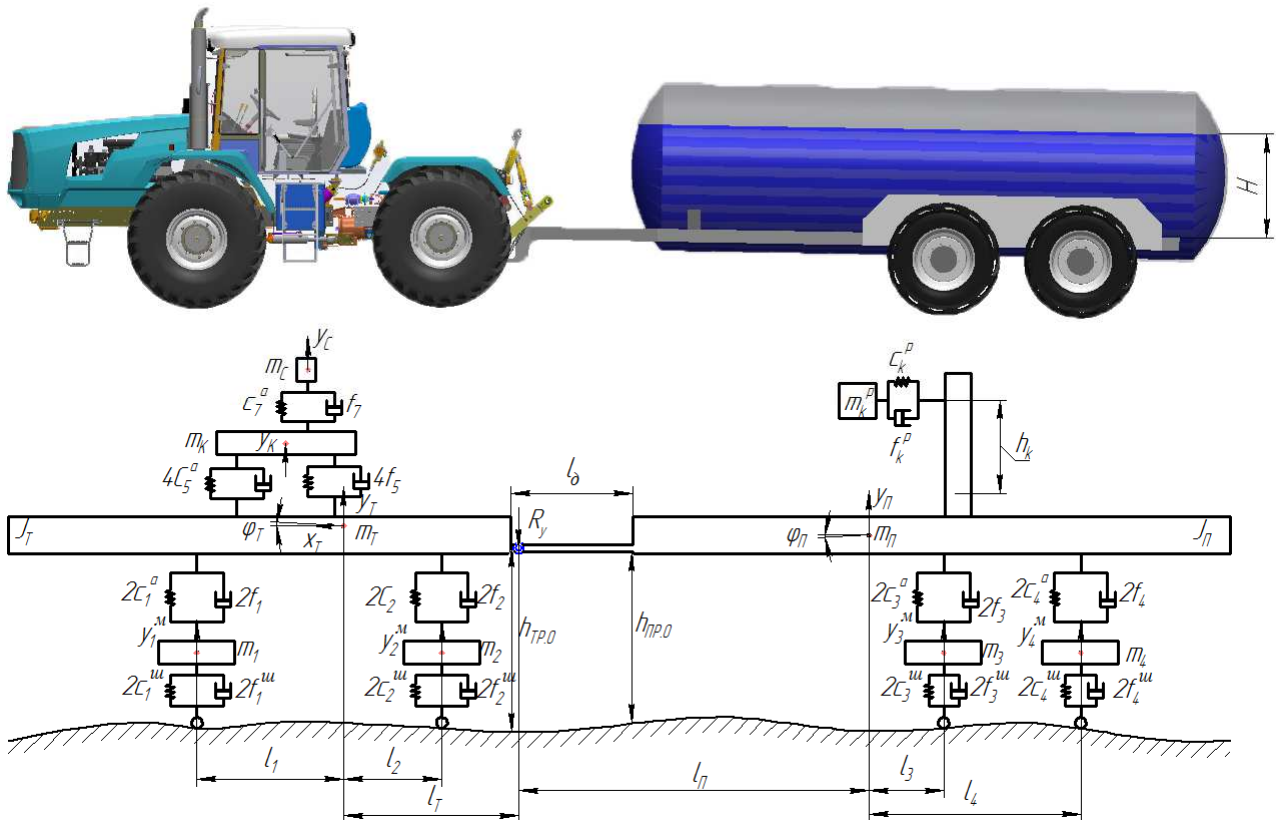


Рис. 14 – Розрахункова схема НП-цистерни з двома колісними парами.

В рівняннях, що наведено нижче, для опису динамічних характеристик ми у більшості випадків зберегли ті ж самі позначення, що вище було застосовано у елементах матриць. Надані у тексті підстрочні пояснення, головним чином, стосуються наступних позначень:

- для окремих діючих сил, які у лінеаризованій моделі не конкретизувалися;
- для коефіцієнтів тертя, які у лінеаризованій моделі не використовувалися;
- для чинників, які збуджують коливання.

Рівняння з додатковим позначенням «а» у його номері дійсне для колісного трактора в поєднанні з П-цистерною (рис. 13), а з позначенням «б» – для трактора з НП-цистерною (рис. 14).

**Математична модель коливань рухомих вузлів трактора** описується наступними рівняннями.

– Вертикальні переміщення корпусу, переднього моста, кабіни та сидіння відповідають диференціальним рівнянням руху, складеним для відповідної маси:

$$m_T \cdot \ddot{y}_T = \sum P_{TP} \quad (4a)$$

або

$$m_T \cdot \ddot{y}_T = \sum P_{TP} - R_y; \quad (4б)$$

$$m_1 \cdot \ddot{y}_1^M = P_1^M - P_1; \quad (5)$$

$$m_K \cdot \ddot{y}_K = \sum_{l=5}^6 P_l - P_C; \quad (6)$$

$$m_C \cdot \ddot{y}_C = P_C, \quad (7)$$

де похідна за часом позначена крапкою, а діючі сили визначаються за формулами

$$\sum P_{TP} = \sum_{i=1}^2 P_i^M - \sum_{l=5}^6 P_l + R_x \cdot (\phi_0 - \psi_T \cdot \text{sign}(\phi_{П} - \phi_T)); \quad (8)$$

$$P_l = c_l^a \cdot (y_1^M - y_{T1}) + f_l \cdot (\dot{y}_1^M - \dot{y}_{T1}); P_l = c_l^a \cdot ((y_T \mp l_l \cdot \phi_T) - (y_K \mp l_l \cdot \phi_K)) + f_l \cdot ((\dot{y}_T \mp l_l \cdot \dot{\phi}_T) - (\dot{y}_K \mp l_l \cdot \dot{\phi}_K)), l = 5, 6;$$

$$P_1^M = c_1^M \cdot (y_{TP1} - y_1^M) + f_1^M \cdot (\dot{y}_{TP1} - \dot{y}_1^M) + G_1^M; P_2^M = c_2^M \cdot (y_{TP2} - y_{T2}) + f_2^M \cdot (\dot{y}_{TP2} - \dot{y}_{T2}) + G_2^M;$$

$$P_{TPi} = \sum_{i=1}^2 P_i^M \dot{y}_{TPi} + \dot{x}_T \psi_{TP} \sum_{i=1}^2 P_i^M; y_{Ti} = y_T \mp l_i \cdot \phi_T, i = 1, 2; P_C = c_7^a \cdot (y_K + l_7 \cdot \phi_K - y_C) + f_7 \cdot (\dot{y}_K + l_7 \cdot \dot{\phi}_K - \dot{y}_C).$$

– Поздовжні переміщення трактора (крім кабіни) і цистерни (крім поверхневих шарів рідини) відбуваються із однаковою швидкістю та прискоренням, що відповідає рівнянню поступального руху центра мас:

$$\left( m_T + \sum_{i=1}^4 m_i + m_{\Pi} + m_P + m_{DV} \right) \cdot \ddot{x}_T = (M_{кр} \cdot i_{TP}) / r_K - P_{BS} - P_{TPP} - P_{TPP} + P_K; \quad (9)$$

де сила спротиву причепау об'єднує вплив тертя та кута нахилу дороги,

$$P_{TPP} = \sum_{i=3}^4 P_i^M \cdot \dot{y}_{TPi} + \dot{x}_T \cdot \psi_{TP} \cdot \sum_{i=3}^4 P_i^M,$$

$$P_i^M = c_i^M \cdot (y_{TPi} - y_{Pi}) + f_i^M \cdot (\dot{y}_{TPi} - \dot{y}_{Pi}) + G_i^M; \quad y_{Pi} = y_{\Pi} \mp l_i \cdot \varphi_{\Pi}, \quad i = 3, 4; \quad P_K = c_K^K \cdot (x_K - x_T) + f_K^K \cdot (\dot{x}_K - \dot{x}_T).$$

– Поздовжні переміщення кабіни і сидіння описуються диференціальними рівняннями

$$(m_K + m_C) \cdot \ddot{x}_T = -P_K.$$

– Кутові переміщення корпусу і кабіни трактора визначаються із диференціальних рівнянь обертального руху:

$$J_T \cdot \ddot{\varphi}_T = \sum M_{TP} + R_x (H_T - h_{T,0} + l_T \cdot (\varphi_0 - \varphi_T)); \quad (10 \text{ а})$$

або

$$J_T \cdot \ddot{\varphi}_T = \sum M_{TP} + R_x (H_T - h_{T,0} - l_T \cdot \varphi_T); \quad (10 \text{ б})$$

$$J_K \cdot \ddot{\varphi}_K = P_6 l_6 - P_5 l_5 - P_7 l_7, \quad (11)$$

де

$$\sum M_{TP} = P_2^M l_2 - P_1 l_1 + P_5 l_5 - P_6 l_6 + R_x (h_T - \psi_T R_T \text{sign}(\dot{\varphi}_{\Pi} - \dot{\varphi}_T)) - H_T \left( (M_{кр} i_{TP}) / r_K - P_{TPP} - (1 - \Delta l) P_{TPP} \right) + R_y l_T;$$

$$h_T = h_{T,0} + l_T \cdot \varphi_0.$$

В цих формулах та рівняннях  $m_{DV}$  – це складова інерційної маси трактора, яка визначається параметрами двигуна та трансмісії,  $m_{DV} = J_M^{\partial\phi} \cdot i_{TP}^2 / r_K^2$ ;  $J_M^{\partial\phi}$  – момент інерції маховика та валів двигуна;  $P_i$ ,  $P_l$ ,  $P_7$  – динамічні складові пружних сил, що діють на підресорені маси остова трактора, кабіни, сидіння;  $P_i^M$  – динамічна складова сумарної радіальної сили, що діє на мости трактора з боку шин;  $P_K$  – сила взаємодії кабіни та рами трактора;  $R_x$ ,  $R_y$  – поздовжня та вертикальна складова сили, яка прикладена до дишла з боку гаку трактора;  $P_{TPP}$ ,  $P_{TPP}$  – сумарна сила, що діє на трактор чи цистерну з боку ґрунту у горизонтальному напрямку;  $\dot{x}_T$ ,  $\dot{x}_T$ ,  $x_T$  – поздовжнє прискорення, швидкість, переміщення трактора;  $P_{BS}$  – сила, що створюється коливанням рідини в цистерні;  $M_{кр}$  – крутний момент двигуна [11, 12];  $J_T$ ,  $J_K$  – момент інерції трактора та кабіни;  $H_T$  – відстань від осей мостів до центру мас трактора;  $h_{T,0}$  – відстань (по вертикалі) від осі мостів до гаку трактора;  $\psi_T$  – коефіцієнт сухого тертя у гаку (та шарнірі дишла у випадку П-цистерни);  $R_T$  – радіус, на якому діє сила сухого тертя;  $\Delta l$  – сумарний коефіцієнт розкладання сил між мостами цистерни і гаком трактора.

На рис. 11, а наведено результат моделювання зовнішньо-швидкісної характеристики двигуна прототипу, яка розраховувалась на основі робіт [11, 12], при цьому на рис. 15 наведено залежності зміни сумарної інерційної маси трактора (разом з інерційністю двигуна) від зміни передавального числа трансмісії. Слід зауважити, що при максимальному передавальному числі інерційна маса більше ніж в 2 рази за гравітаційну.

**Математична модель рухомих вузлів цистерни** описується наступними рівняннями.

– Вертикальні переміщення корпусу разом з мостами знаходимо з диференціальних рівнянь

$$(m_{\Pi} + m_P) \cdot \ddot{y}_{\Pi} = \sum P_{\Pi P} + R_y \quad (12 \text{ а})$$

або

$$(m_{\Pi} + m_P) \cdot \ddot{y}_{\Pi} = \sum P_{\Pi P}, \quad (12 \text{ б})$$

де діючі сили

$$\sum P_{\Pi P} = \sum_{i=3}^4 P_i^M - R_x \cdot (\varphi_0 - \psi_{\Pi} \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}_{\Pi} - \dot{\varphi}_T)); \quad (13)$$

– Поздовжні переміщення корпусу цистерни визначаються за формулою

$$x_{\Pi} = x_T + h \cdot \varphi_{\Pi}. \quad (14)$$

– Кутові переміщення корпусу цистерни визначаються із рівнянь обертального руху

$$J_{\Pi} \cdot \ddot{\varphi}_{\Pi} = \sum M_{\Pi P} + R_x ((h_{\Pi} - \Delta h) - l_{\Pi} \cdot (\varphi_0 - \varphi_{\Pi})) \quad (15 \text{ а})$$

або

$$J_{\Pi} \cdot \ddot{\varphi}_{\Pi} = \sum M_{\Pi P} + R_x \left( (h_{\Pi} - \Delta h) + l_{\Pi} \cdot \varphi_{\Pi} \right) - (l_{\Pi} + l_{\delta}) \cdot R_y, \quad (156)$$

де

$$\begin{aligned} \sum M_{\Pi P} &= P_4^M l_4 - P_3^M l_3 - M_{\text{БС}} + \Delta l \cdot P_{\text{ГРПР}} \cdot (H_{\Pi} + \Delta h) + R_x \cdot \psi_T R_T \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}_T - \dot{\varphi}_{\Pi}); \\ h_{\Pi} &= h_{\Pi,0} - \Delta h - l_{\Pi} \cdot \varphi_{\Pi}; \quad \Delta h = m_{\text{Б}} / (m_{\Pi} + m_{\text{Б}}) \cdot (H - h/2); \quad h = S / \left( 2 \cdot \sqrt{H \cdot (2R_{\Pi} - H)} \right); \\ S &= \begin{cases} R_{\Pi}^2 \cdot \arcsin(l/R_{\Pi}) - l \cdot (R_{\Pi} - H), & \text{якщо } H < R_{\Pi}; \\ \pi \cdot R_{\Pi}^2 - R_{\Pi}^2 \cdot \arcsin(l/R_{\Pi}) - l \cdot (R_{\Pi} - H), & \text{якщо } H \geq R_{\Pi}, \end{cases} \\ l &= \sqrt{H \cdot (2R_{\Pi} - H)}, \end{aligned} \quad (16)$$

$J_{\Pi}$  – момент інерції цистерни;  $L$  – відстань від центру до краю цистерни;  $R_{\Pi}$  – радіус цистерни;  $\Delta h$  – зміщення центру мас цистерни в залежності від рівня рідини;  $h_{\Pi,0}$  – відстань (по вертикалі) від осі мостів до точок з'єднання зчпного пристрою, які розташовані на цистерні;  $H_{\Pi}$  – відстань від осі мостів до центру мас цистерни;  $H$  – рівень рідини в цистерні;  $S$  – площа вільної поверхні рідини, яка відповідає відомій висоті  $H$ ;  $h$  – еквівалентний рівень рідини (у цистерні прямокутної форми та того ж самого об'єму [13]).

**Модель зчпного пристрою.** Поздовжня сила, яка діє на пристрій, описується рівнянням

$$R_x = \frac{\left[ (M_{\text{кр}} \cdot i_{\text{тр}}) / r_K - P_{\text{ГРПР}} - (1 - \Delta l) P_{\text{ГРПР}} + P_K \right] \cdot m_{\Pi, x} + [\Delta l \cdot P_{\text{ГРПР}} + P_{\text{БС}}] \cdot m_{T, x}}{m_{T, x} + m_{\Pi, x}},$$

а кут нахилу дишла становитиме

$$\varphi_{\delta} = (y_{\Pi} - l_{\Pi} \cdot \varphi_{\Pi} - y_T - l_T \cdot \varphi_T - \Delta c - \Delta h_{\delta}) / l_{\delta} \quad (17 \text{ а})$$

або

$$\varphi_{\delta} = 0, \quad (17 \text{ б})$$

де

$$\begin{aligned} \Delta c &= m_{\Sigma P} \cdot g \cdot \Delta l / \left( \sum_{i=3}^4 \frac{1}{1/c_i^a + 1/c_i^u} \right) + \Delta h_{\delta}; \\ \Delta l &= 1 \end{aligned} \quad (18 \text{ а})$$

або

$$\Delta l = \frac{2(l_{\Pi} + l_{\delta})}{l_4 - l_3 + 2(l_{\Pi} + l_{\delta})}, \quad (18 \text{ б})$$

$m_{T, x} = m_T + m_1 + m_2$  – це маса остову та мостів трактора;  $m_{T, x} = m_T + m_1 + m_2$  – маса остову та мостів цистерни;  $m_{\Sigma P}$  – маса рідини у цистерні;  $\varphi_{\Pi}$  – кут нахилу цистерни;  $\Delta c$  – усадка цистерни на власні ресори після заповнення її рідиною;  $\Delta h_{\delta}$  – різниця висот між крюком трактора та віссю дишла для порожньої цистерни;  $l_{\delta}$  – довжина зчпного пристрою (від краю трактора до краю цистерни).

Вертикальна реакція  $R_y$  в поєднанні з причіп-цистерною є відсутньою, а для напівпричепу її величина знаходиться із розв'язку системи диференціальних рівнянь (46), (106), (126), (156) та рівняння

$$\ddot{x}_T + l_T \cdot \ddot{\varphi}_T = \ddot{x}_{\Pi} - l_{\Pi} \cdot \ddot{\varphi}_{\Pi}, \quad (19)$$

що є наслідком співвідношення

$$x_T + l_T \cdot \varphi_T = x_{\Pi} - l_{\Pi} \cdot \varphi_{\Pi} + \Delta c_0.$$

Таким чином, зіставляючи рівняння (46), (106), (126), (156) та (19), отримуємо

$$\Sigma P_{\text{ТР}} / m_T - R_y / m_T + l_T \cdot \Sigma M_{\text{ТР}} / J_T - l_T^2 \cdot R_y / J_T = \Sigma P_{\Pi P} / m_{\Pi} + R_y / m_{\Pi} + l_{\Pi}^2 \cdot R_y / J_{\Pi} - (\Sigma M_{\Pi P} \cdot l_{\Pi}) / J_{\Pi},$$

тобто

$$R_y = \frac{(\Sigma P_{\text{ТР}}) / m_T + l_T \cdot (\Sigma M_{\text{ТР}}) / J_T - (\Sigma P_{\Pi P}) / (m_{\Pi} + m_{\text{Б}}) + (l_{\Pi} + l_{\delta}) \cdot (\Sigma M_{\Pi P}) / J_{\Pi}}{1/m_T + l_T^2 / J_T + 1/(m_{\Pi} + m_{\text{Б}}) + (l_{\Pi} + l_{\delta})^2 / J_{\Pi}}.$$

**Коливання рідини.** Аналіз коливань рідини у цистерні базується на застосуванні методів, які описано в роботі [13]. Проте задля врахування вертикальних прискорень центру мас цистерни деякі залежності було уточнено. Крім того, як показано при виконанні динамічного аналізу, для досягнення необхідної точності розрахунку достатньо моделювати рух перших двох поверхневих шарів, а іншу масу приєднати до оболонки цистерни.

В роботі [13] було отримано наступні формули для розрахунку власної частоти  $\nu_k$  та коефіцієнту жорсткості  $c_k^p$  коливань  $k$ -го шару рідини;

$$\nu_k = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\beta_k \cdot (g + \sigma_p \cdot \beta_k^2) \cdot th(\beta_k h)}, \quad c_k^p = m_k^p \cdot (2\pi \cdot \nu_k)^2, \quad \beta_k = \pi \cdot (k - 0.5) / L, \quad k = 1, 2, \dots,$$

де  $\sigma_p$  – питомий коефіцієнт поверхневого натягу рідини.

Зважаючи на мале значення цього коефіцієнту ( $\sigma_p < 0.1 \text{ М} / \text{с}^2$ ), для першого та другого шарів ним можливо знехтувати, та використовувати спрощені формули

$$\nu_k = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g \cdot \beta_k \cdot th(\beta_k h)}; \quad c_k^p = m_k^p \cdot g \cdot \beta_k \cdot th(\beta_k h). \quad (20)$$

В умовах дії вертикального прискорення  $\ddot{y}_\Pi$  формули (20) набувають вигляду

$$\nu_k = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(g + \ddot{y}_\Pi) \cdot \beta_k \cdot th(\beta_k h)}; \quad c_k^p = m_k^p \cdot (g + \ddot{y}_\Pi) \cdot \beta_k \cdot th(\beta_k h),$$

звідки

$$G_k^p = m_k^p \cdot (g + \ddot{y}_\Pi).$$

В результаті континуальну модель низькочастотних коливань вдалося замінити дискретною моделлю, яка з достатньою для практики точністю описується наступними рівняннями:

$$m_k^p \cdot \ddot{x}_k^p + f_k^p \cdot (\dot{x}_k^p - \dot{x}_\Pi) + c_k^p \cdot (x_k^p - x_\Pi) = G_k^p \cdot \varphi_\Pi, \quad k = 1, 2; \quad (21)$$

$$P_{\text{В}\Sigma} = \sum_{k=1}^2 \left[ f_k^p \cdot (\dot{x}_\Pi - \dot{x}_k^p) + c_k^p \cdot (x_\Pi - x_k^p) + G_k^p \cdot \varphi_\Pi \right]; \quad (22)$$

$$M_{\text{В}\Sigma} = \sum_{k=1}^2 \left[ f_k^p \cdot (\dot{x}_\Pi - \dot{x}_k^p) + c_k^p \cdot (x_\Pi - x_k^p) + G_k^p \cdot \varphi_\Pi \right] \cdot h_k^p, \quad (23)$$

де  $P_{\text{В}\Sigma}$ ,  $M_{\text{В}\Sigma}$  – це сумарна сила та момент сили, які діють на платформу цистерни.

Рівняння для визначення коефіцієнтів демпфірування має наступний вигляд:

$$f_k^p = 2d_p \cdot \nu_k \cdot m_k^p, \quad (24)$$

де  $d_p$  – логарифмічний декремент затухання цих коливань.

У формулах (24) залежність від прискорення  $\ddot{y}_\Pi$  не враховується.

Відстані  $h_k^p$  між центрами мас поверхневого шару та цистерни розраховується по отриманим для цієї задачі аналітичним залежностям як відомі функції від рівня рідини та геометричних розмірів цистерни.

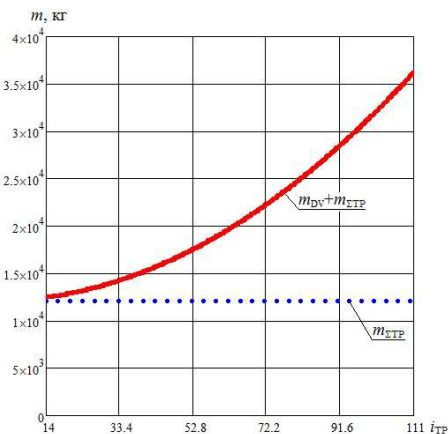


Рис. 15 – Гравітаційна та інерційна маси трактора в залежності від передавального числа трансмісії.

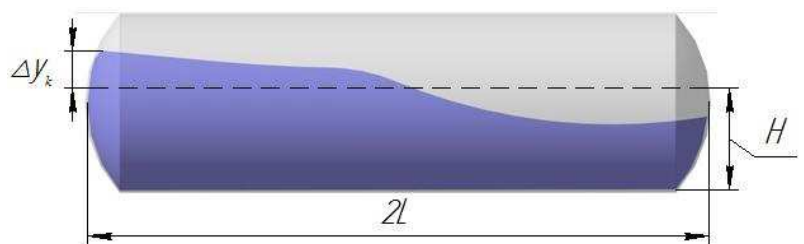


Рис. 16 – Приклад підняття рівня рідини при розгоні або гальмуванні машинно-тракторного агрегату.

Для поглибленого сприйняття коливань рідини в цистерні доречно аналізувати підняття рівня рідини (рис. 16) при розгоні або гальмуванні машинно-тракторного агрегату. Відповідна величина обчислюється

$$\Delta y_k = (-P_{\text{В}\Sigma}) / (2 \cdot S \cdot \rho \cdot g),$$

де  $\rho$  – щільність рідини, яка знаходиться в цистерні.



**Опис рельєфу дорожнього покриття.** Задля формування математичної моделі при дослідженні пов'язаних вимушених коливань машино-тракторного агрегату при експлуатації необхідно окреслити зміну вертикальних переміщень ґрунту. В роботі [14] сформовано випадкову функцію мікропрофілю поверхні, по якій рухається колісний трактор при виконанні транспортних та технологічних операцій. В нашій роботі опис нерівностей поверхні відбувається із застосуванням двох гармонійних складових, які описують зміну мікропрофілю та макропрофілю дороги, а саме:

$$y_{ГРj} = A_{\lambda} \cdot \sin(2\pi \cdot (x_T - \Delta L_j) / L_{\lambda}) + A_{\Lambda} \cdot (1 - \cos(2\pi \cdot (x_T - \Delta L_j) / L_{\Lambda})), \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

де  $A_{\lambda}$  – амплітуда мікроколивань ґрунту (нерівностей);  $L_{\lambda}$  – довжина хвилі мікроколивань;  $A_{\Lambda}$  – амплітуда макроколивань поверхні (бугри та впадини);  $L_{\Lambda}$  – довжина хвилі макроколивань;  $\Delta L_j$  – фазові зсуви, які визначаються відстанню між мостами транспортного засобу,

$$\Delta L_1 = 0; \Delta L_2 = l_1 + l_2; \Delta L_3 = l_1 + l_T + l_{\partial} + l_{\Pi} \pm l_3; \Delta L_4 = l_1 + l_T + l_{\partial} + l_{\Pi} + l_4. \quad (25)$$

Співвідношення (25) виконуються як для П-цистерни, так і для НП-цистерни; у першому випадку значення розміру  $l_3$  використовується зі знаком «–» (рис. 13), а у другому – зі знаком «+» (рис. 14).

Хвилі мікроколивань у випадку резонансу спроможні призвести до високоамплітудних вібрацій, що є шкідливими для здоров'я тракториста. За допомогою хвилі макроколивань стає можливим дослідити дію центробіжних сил на опуклих ділянках дороги, а також виникнення галопуючого резонансу на крутих спусках.

Відстані між мостами та їх співвідношення з довжиною  $L_{\lambda}$  мікрохвилі суттєво впливає на характер і амплітуди коливань трактора і цистерни. Так, якщо

$$\Delta L_2 \approx L_{\lambda} \text{ або } \Delta L_2 \approx L_{\lambda} / 2$$

то у тракторі, головним чином, збуджуються зсувні коливання центру мас у вертикальному напрямку або кутові коливання корпусу і кабіни. Аналогічні умови для цистерни мають вигляд

$$\Delta L_4 - \Delta L_3 \approx L_{\lambda} \text{ та } \Delta L_4 - \Delta L_3 \approx L_{\lambda} / 2.$$

При виконанні умов

$$0.5 \cdot (\Delta L_4 + \Delta L_3) - 0.5 \cdot \Delta L_2 \approx L_{\lambda} \text{ або } 0.5 \cdot (\Delta L_4 + \Delta L_3) - 0.5 \cdot \Delta L_2 \approx (0.5 + k) L_{\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

центри мас трактора та цистерни під дією збурюючих чинників збоку коліс будуть зсуватися синфазно або у протифазі, проте на цей рух накладаються пов'язані коливання, які передаються через зчпний пристрій. Тому остаточні висновки про характер та амплітуди коливань можна зробити за результатами динамічних розрахунків.

**Вибір метода і шага інтегрування.** У правих частинах формул (22), (23) використовується значення старшої похідної  $\ddot{y}_{\Pi}$ , тому диференціальні рівняння моделі, перш за все, потребують приведення до так званого *нормального вигляду*. Зробити нормалізацію не складно, оскільки складові із похідною  $\ddot{y}_{\Pi}$  входять до вказаних частин адитивно. Фактично нормалізації підлягає лише рівняння (15а,б), а у інших випадках значення  $\ddot{y}_{\Pi}$  використовується як вже відома величина. Після нормалізації система диференціальних рівнянь набуває вигляду

$$\left\{ d\vec{X} / dt = \vec{V}; d\vec{V} / dt = f(\vec{X}, \vec{V}, t) \right\}$$

і для її інтегрування було обрано *схему модифікованого метода Ейлера*, а для проведення розрахунків застосовано програмне – діалогове середовище MatCAD. Такий вибір був пов'язаний із забезпеченням найбільш простого і прозорого програмування, а також враховував можливість подальшого розвитку і уточнення нелінійної моделі. Якщо таке уточнення буде моделювати удари, які відбуваються у зчпному пристрої під час перекладання зазорів, то використовувати для інтегрування відому *схему Рунге-Кутта четвертого порядку* є недоречним.

Модифікований метод Ейлера має наступні рекурентні формули:

$$\vec{V}(t + \Delta t) = \vec{V}(t) + f(\vec{X}(t), \vec{V}(t), t) \cdot \Delta t; \vec{X}(t + \Delta t) = \vec{X}(t) + 0.5 \cdot (\vec{V}(t + \Delta t) + \vec{V}(t)) \cdot \Delta t.$$

Такий метод добре зарекомендував себе при розрахунках систем пневмоавтоматики ракетної техніки [18]. Якщо права частина  $f(\vec{X}, \vec{V}, t)$  фактично не містить залежності від вектора швидкостей  $\vec{V}$  (тобто силами тертя знехтували), то цей метод має другий порядок точності і еквівалентний відомій схемі, де сітки за часом для переміщень  $\vec{X}(t)$  і швидкостей  $\vec{V}(t)$  зсунуті одна відносно іншої на половину розрахункового шагу  $\Delta t$ . Після врахування тертя порядок метода знижується, але якщо тертя є слабким, то цей порядок наближається до другого. Нагадаємо що стандартний (не модифікований) метод Ейлера має перший порядок точності, і сучасним вимогам з ефективності він не задовольняє.

Шаг інтегрування  $\Delta t = 0.007$ с було обрано з урахуванням досягнення необхідної точності розрахунку і стійкості алгоритму. Для цього за допомогою методів [15] були зроблені наступні оцінки.

За результатами динамічного аналізу після спрощення математичної моделі максимальна частота власних коливань становила  $\nu_M \approx 4.2$  Гц, тобто на одному періоді цих коливань розташовується 60 кроків розрахунку (при мінімально допустимій кількості 12), а для групи низькочастотних коливань та для вимушених коливань цей п'ятикратний запас щонайменше подвоюється.

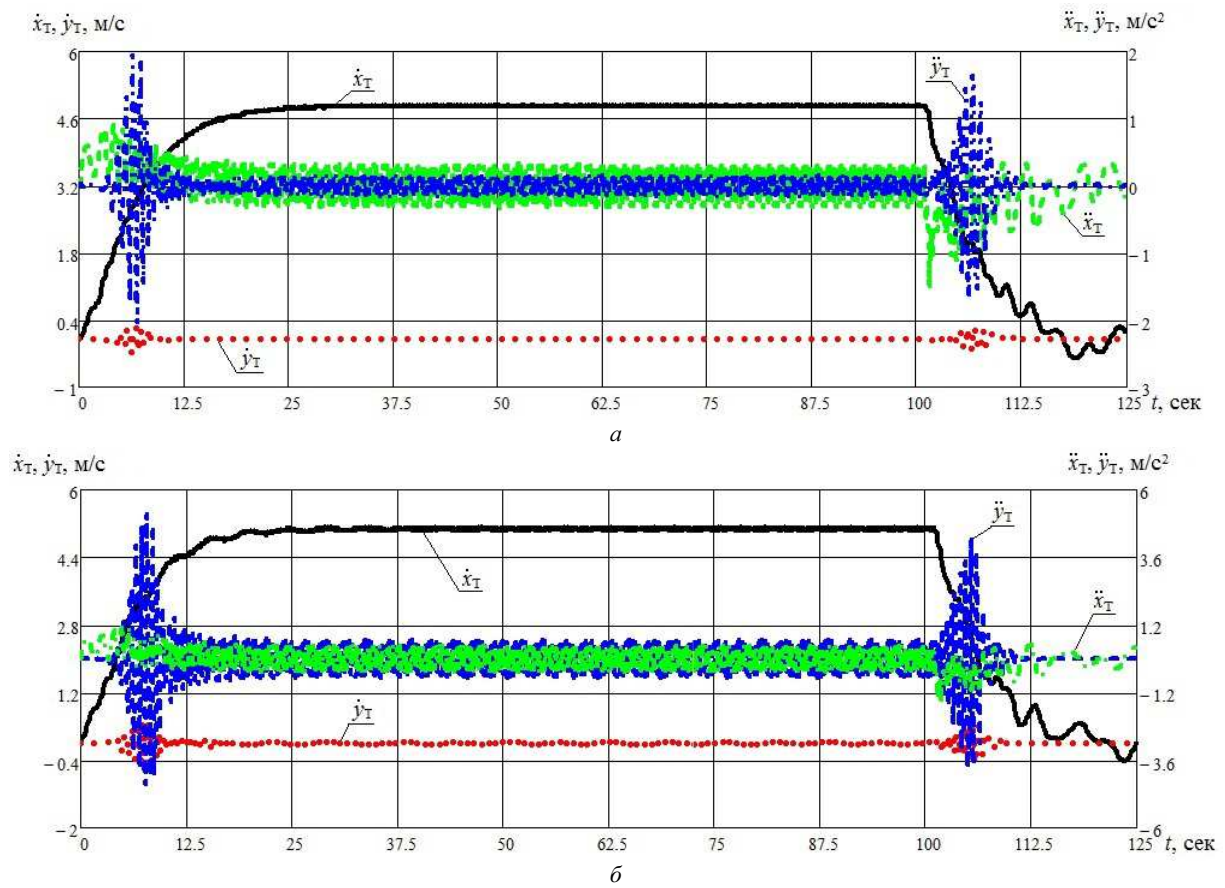


Рис. 17 – Графіки швидкості та прискорення остова трактора: а – МТА із П-цистерною; б – із НП-цистерною.

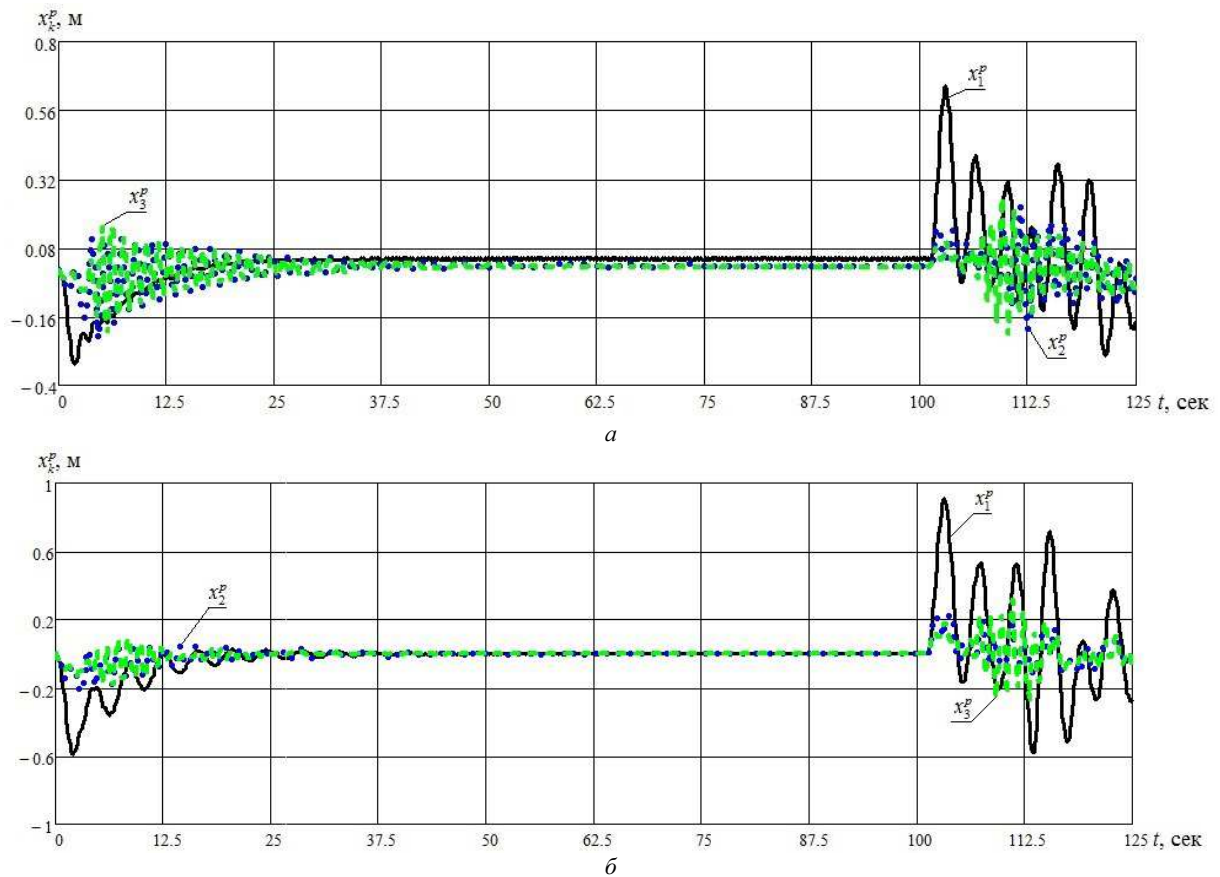


Рис. 18 – Графіки горизонтальних зсувів поверхневих шарів рідини: а – МТА із П-цистерною; б – із НП-цистерною.

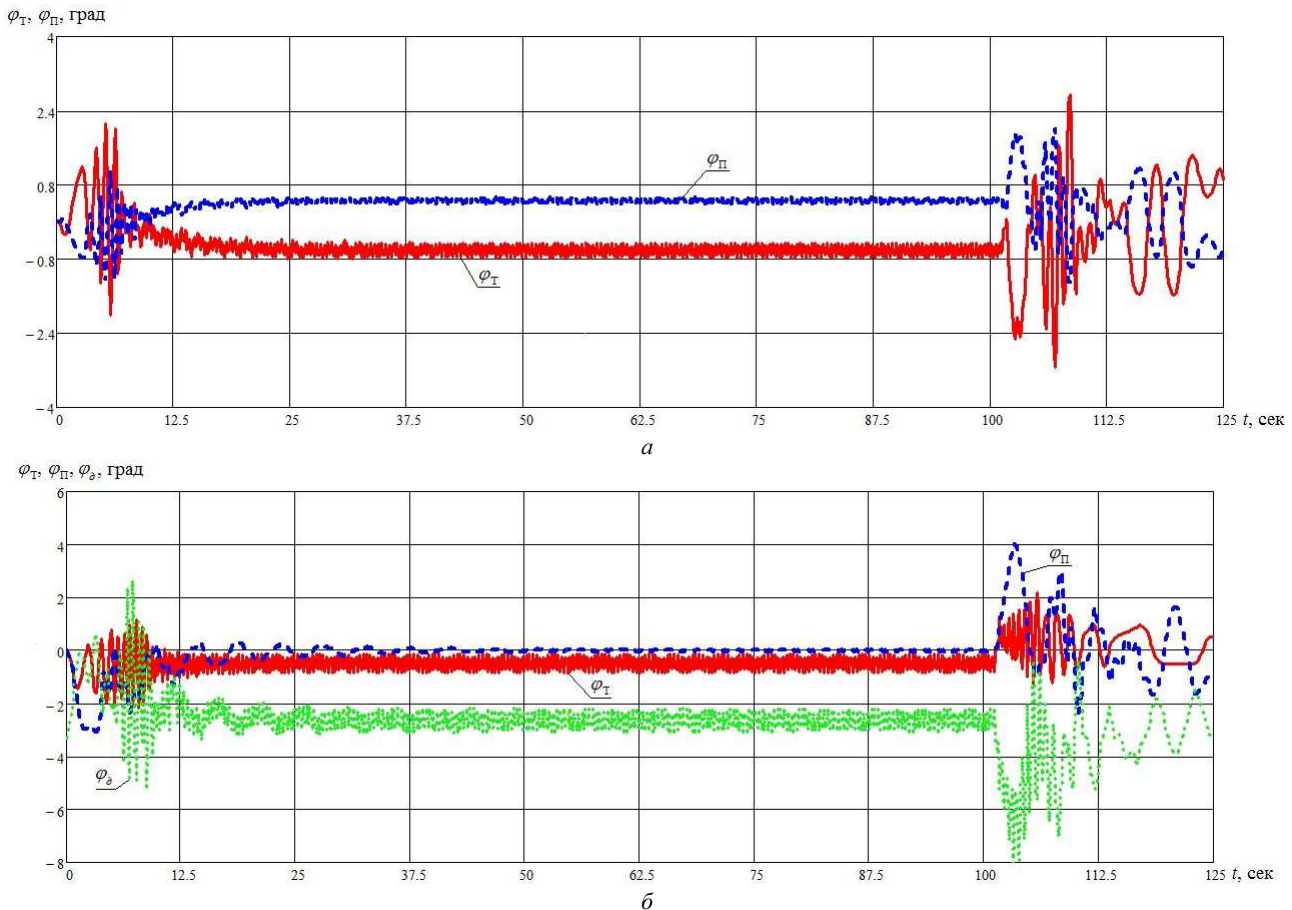


Рис. 19 – Графіки зміни кутів нахилу рами трактора, цистерни та дишла: а – МТА із П-цистерною; б – із НП-цистерною.

Стійкість модифікованого алгоритму Ейлера залежить від співвідношення кроку інтегрування і так званого показника коливальності системи  $d_{\text{кол}}$ , тобто для забезпечення стійкості необхідно задовольнити умову

$$\Delta t < d_{\text{кол}}.$$

Величина показника коливальності приблизно дорівнює мінімуму величини  $f_j / c_j$ , де  $f_j, c_j$  – це коефіцієнти демпфірування та жорсткості, які використовуються при моделюванні руху  $j$ -тої маси. Для системи, що досліджується, виходячи з даних табл. 1 отримуємо оцінку  $d_{\text{кол}} \approx 0.01 \text{ с}$ , і, як бачимо, саме ця умова, а не точність розрахунку, лімітує вибір кроку інтегрування.

**Результати тестових розрахунків.** Значення констант і змінних величин, які використовуються при розрахунках, наведено в табл. 1.

На рис. 17 – 21 показано результати моделювання руху машинно-тракторного агрегату з П-цистерною та НП-цистерною при рівні рідини в цистерні 1.4 м; передавальне число трансмісії – 25.8. Зміни крутного моменту двигуна та коефіцієнтів тертя на етапах розгону та гальмування у цьому розрахунку задано наближеними аналітичними залежностями, адже головна мета дослідження – це моделювання сталого процесу руху. Амплітуда мікроколивань нерівностей становила  $A_\lambda = 0.02 \text{ м}$ ; а довжина хвилі мікроколивань  $L_\lambda = 2 \text{ м}$ , що співпадає з довжиною дорожніх плит, які інколи укладають у основу траси. Рис. 16 – 20 відображають характеристики руху МТА по горизонтальній дорозі, рис. 21 – по дорозі з істотною опуклістю рельєфу та значним максимальним нахилом.

Значні коливання сили  $R_x$ , які показано на рис. 20, 21, свідчать про певну обмеженість припущень, що приймалися на етапі динамічного аналізу, де використовувалася лінеаризована модель та умова  $R_x = \text{const}$ . Теж саме стосується зміни коефіцієнтів зчеплення шин з дорогою. Проте, оскільки вплив цих констант на результати динамічного аналізу був не дуже значним, то й основні висновки того аналізу залишаються вірними.

Так, при розрахунковому дослідженні МТА за допомогою нелінійної моделі відмічено, що під час руху з гори в з'єднанні причіпного пристрою колісного трактора та П-цистерни виникають резонансні закручування дишла в зчіпному пристрої (рис. 22). Тому наведена на рис. 12 залежність набуває більшої актуальності.

**Розрахунок коефіцієнту в'язкого тертя.** Завдяки відомим із технічної документації значенням  $\dot{x}_{Tmax}$  максимальної швидкості руху колісного трактора ХТЗ-242К на дорогах з різною якістю покриття можливо встановити зміну коефіцієнту в'язкого тертя в залежності від якості. Для цього було складено наступні рівняння:

$$\psi_{TP} \cdot \dot{x}_{Tmax} \cdot m_T \cdot g = (M_{кр} \cdot i_{TP}) / r_K ; \quad i_{TP} = \omega_{об} / \omega_K = \omega_{об} / (\dot{x}_{Tmax} / r_K) = (\omega_{об} \cdot r_K) / \dot{x}_{Tmax} ,$$

де  $\omega_K$  – кутова швидкість колеса.

Виконавши перетворення, отримаємо

$$\psi_{TP} = (M_{кр} \cdot \omega_{об}) / (m_T \cdot g \cdot \dot{x}_{Tmax}^2) . \quad (26)$$

Таким чином, було встановлено значення коефіцієнту в'язкого тертя (для асфальтобетону – 0.018; для ґрунтової поверхні – 0.03; для стерні колосових – 0.11), що в подальшому дозволить якісно оцінювати техніко-економічні показники машинно-тракторного агрегату.

**Визначення резонансної величини для відстані між нерівностями дороги.** Середнє значення відстані між нерівностями визначає основний період зміни профілю дороги, тобто довжину хвилі мікроколивань. Зауважимо, що конкретний вигляд розподілу нерівностей впливає на амплітуди другої, третьої та інших гармонік, які, по перше, виявляються значно меншими, ніж у основної гармоніки, а по-друге, збуджуватиме коливання більших частот, які ефективно демпфуються силами тертя. Тому вищі гармоніки в нашій роботі не досліджуються.

Залежність (26) для коефіцієнту в'язкого тертя надає можливість встановити взаємозв'язок між резонансною величиною середньої відстані між нерівностями, рівнем рідини, яка знаходиться в цистерні, та швидкістю руху машинно-тракторного агрегату (табл. 5). Такий зв'язок допомагає організації ефективного тестування динамічних якостей МТА при сталому русі по прямій дорозі з конкретним типом дорожнього покриття.

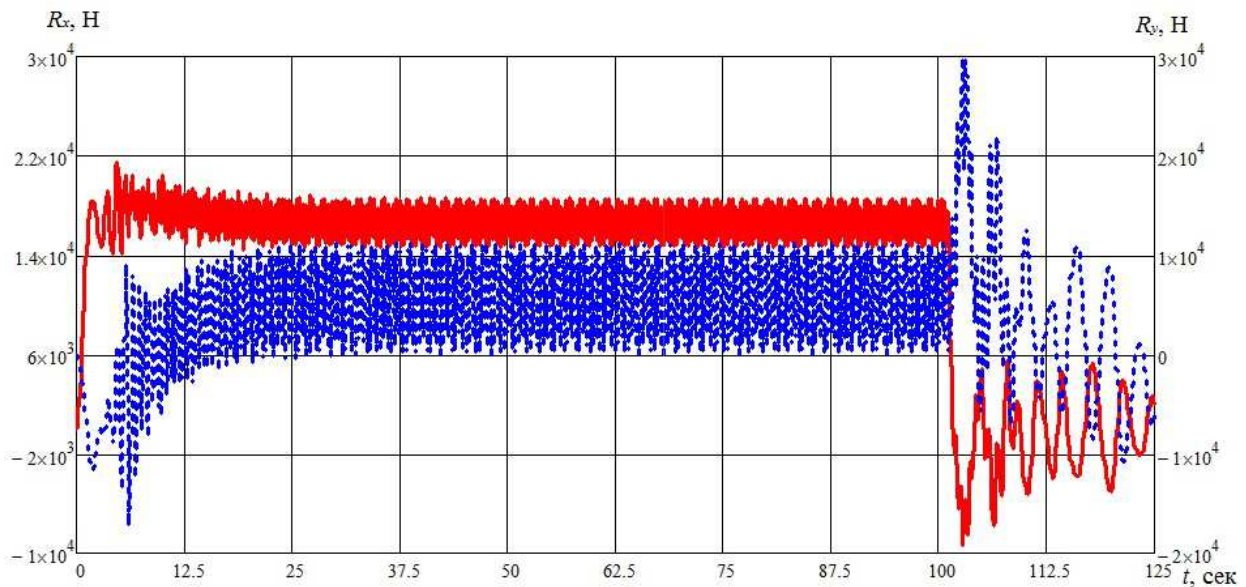


Рис. 20 – Графіки горизонтальної та вертикальної компоненти сили на крюку трактора із НП-цистерною.

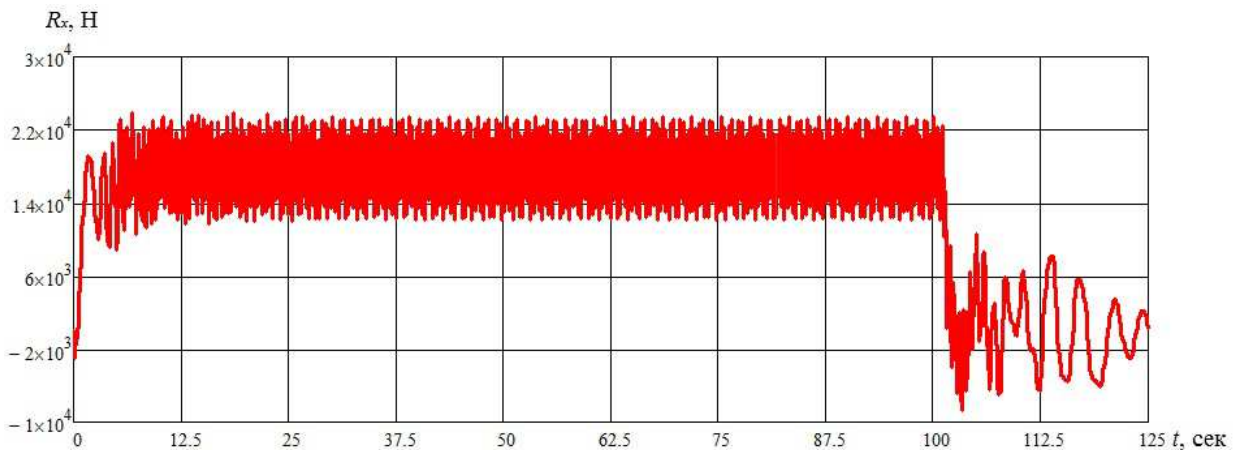


Рис. 21 – Графіки поздовжньої сили на крюку трактора із П-цистерною.



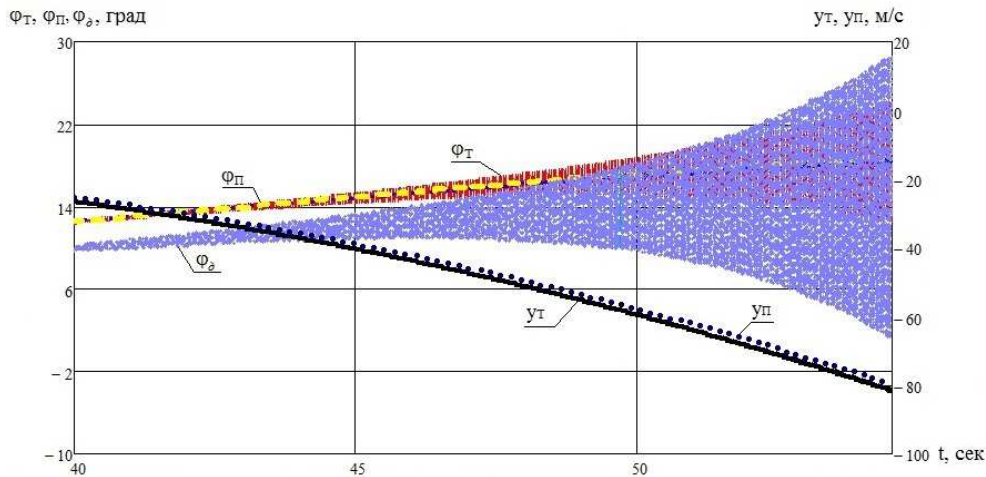


Рис. 22 – Результати моделювання руху з гори машинно-тракторного агрегату з П-цистерною при максимальному куті нахилу дороги  $30^\circ$  та зменшеною жорсткістю шин.

Із динамічного аналізу для кожного рівня рідини, яка знаходиться в цистерні, стає відомою частота власних коливань, що є найбільш шкідливими для здоров'я тракториста. Звідки за допомогою визначення періоду коливань  $T$  та швидкості руху  $\dot{x}_T$  можна визначити резонансну довжину шляху між нерівностями:

$$T = 1/\nu_k; \quad L_\lambda = T \cdot \dot{x}_T.$$

Результати розрахунку залежать від передавального числа трансмісії, яке є обмеженим в наслідок обмеження крутного моменту дизеля. У табл. 5 знаком «+» відмічено параметри характерних режимів, при яких треба досліджувати динаміку МТА; жирним шрифтом виокремлено *характерні режими*, які відповідають зовнішній швидкісній характеристиці і на яких це можна робити за допомогою описаної вище нелінійної математичної моделі. На інших резонансних значеннях швидкості руху двигун працює вздовж регуляторних характеристик, тому до описаної моделі МТА бажано додавати блок, який розраховує перехідні процеси у регуляторі.

Для ілюстрації впливу довжини хвилі на амплітуду коливань було виконано моделювання руху по асфальтобетонній поверхні машинно-тракторного агрегату з НП-цистерною, яка заповнена рідиною до висоти  $H = 1.5$  м та при русі на передачі  $i_{тр} = 31.2$  з відстанню між нерівностями  $L_\lambda = \Delta A_{1,2}$ .

Таблиця 5 – Діапазони взаємопов'язаних резонансних значень довжини мікрохвилі та швидкості сталого руху МТА

Передавальне число $i_{тр}$	Швидкість руху $\dot{x}_T$ , км/год (при 1800 – 2100 об/хв валу двигуна)	Відстань між нерівностями $L_\lambda$ , м (при $H = 0.5 \div 1.5$ , м)	Поверхня		
			Асфальтобетон	Грунтова	Стерня колосових
110.5	4.3 – 4.97	1.76 – 2.7	+	+	+
99.63	4.86 – 5.51	2 – 3	+	+	+
93.47	5.18 – 5.88	2.1 – 3.18	+	+	+
82.39	5.88 – 6.66	2.4 – 3.6	+	+	+
63.62	7.64 – 8.63	3.1 – 4.7	+	+	+
57.36	8.46 – 9.57	3.5 – 5.2	+	+	+
53.82	8.99 – 10.2	3.7 – 5.5	+	+	–
47.44	10.2 – 11.57	4.2 – 6.3	+	+	–
34.61	13.9 – 15.87	5.7 – 8.6	+	+	–
31.2	15.4 – 17.6	6.3 – 9.5	+	+	–
29.27	16.34 – 18.76	6.7 – 10.1	+	–	–
25.8	18.42 – 21.28	7.6 – 11.5	+	–	–

Як видно з рис. 23, при сталому русі коливання рідини при резонансному значенні  $L_\lambda = 9.5$  м переважає в багато разів, ніж отримане при нерезонансному значенні  $L_\lambda = 2$  м, а на етапі розгону та гальмування спостерігається зворотна ситуація. Проте, такий результат є зрозумілим, і він не суперечить основним висновкам цієї роботи. Розгін і гальмування МТА відбуваються епізодично, через великі проміжки часу сталого руху, тому коливання, що збуджуються, швидко загасають і не спроможні надати шкоди здоров'ю тракториста.

**Аналіз сил Кориоліса та інших факторів нелінійності моделі.** Під час зсуву у вертикальному напрямі сидіння тракториста або переднього мосту трактора виникають бокові сили, значення яких даються формулами

$$F_k^C = m_C \cdot \ddot{y}_C \cdot \psi_K, \quad F_k^M = m_1 \cdot \ddot{y}_1^M \cdot \psi_T.$$

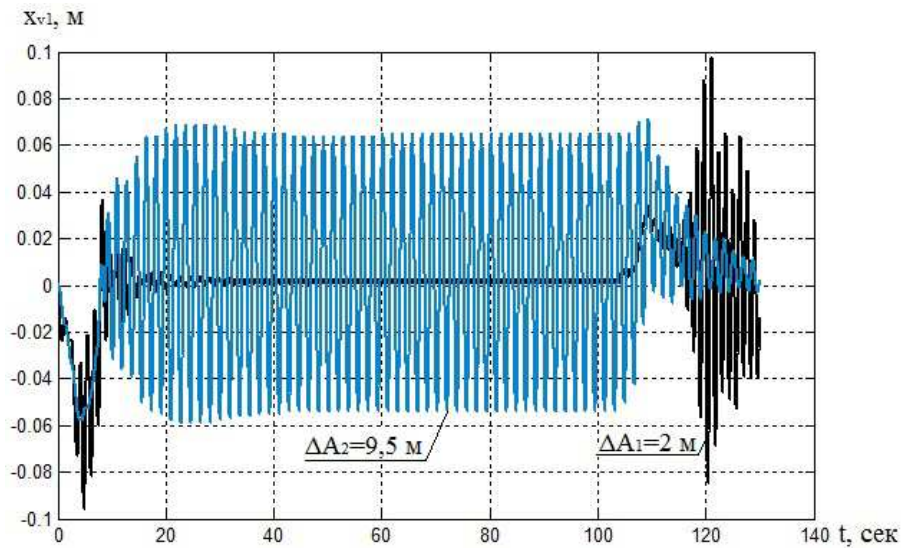


Рис. 23 – Графіки зміщення поверхневого шару рідини в цистерні при русі МТА на тестовому швидкісному режимі.

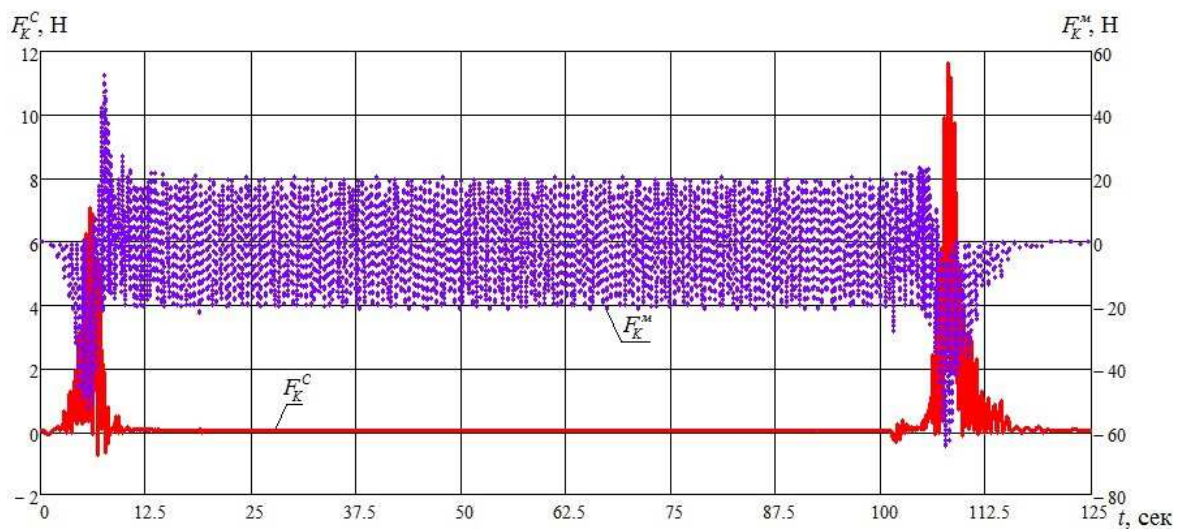


Рис. 24 – Графіки сил Коріоліса, які діють на сидіння водія та передній міст колісного трактора.

Ці сили діють відповідно й на кабінку та раму трактора, намагаючись посунути їх у горизонтальному напрямі а також розгорнути навколо центрів мас. Проте моделювання цих сил (рис. 24), яке виконувалося під час тестування нелінійної моделі, засвідчило, що вони є дуже малими (наприклад, вони на три порядки менше ніж сили, показані на рис. 20, 21). Тому присутність сил Коріоліса доречно знехтувати.

Це ж саме стосується й інших відомих факторів нелінійності, а саме старших складових розкладання синуса або косинуса у степеневі ряди. Зауважимо, що, наприклад, замість формул (8) або (13) кінематика пропонує використовувати більш точні вирази

$$\sum P_{TP} = \sum_{i=1}^2 P_i^M - \sum_{l=5}^6 P_l + R_x \cdot [\sin \varphi_0 - \psi_T \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}_T - \dot{\varphi}_T)] \quad \text{або} \quad \sum P_{TP} = \sum_{i=3}^4 P_i^M - R_x \cdot [\sin \varphi_0 - \psi_T \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}_T - \dot{\varphi}_T)],$$

а замість рівняння (10 а) – його аналог

$$J_T \cdot \ddot{\varphi}_T = \sum M_{TP} + R_x (H_T - h_{T,0} + l_T \cdot \sin(\varphi_0 - \varphi_T)).$$

Але, якщо кути нахилу залишаються в тих межах, що спостерігаються на рис. 18, то припустимо користуватися спрощеннями

$$\sin \varphi_0 \approx \varphi_0, \quad \sin(\varphi_0 - \varphi_T) \approx \varphi_0 - \varphi_T, \quad \sin(\varphi_0 - \varphi_T) \approx \varphi_0 - \varphi_T, \quad \cos \varphi_0 \approx 1,$$

які створюють відносну похибку, що не перебільшує 0.5%.

Сили спротиву повітря розраховуються за формулами

$$F_{нов} = \psi_{нов} \cdot S_{нов} \cdot \rho_{нов} \cdot |\dot{x}_{TP}| \cdot \dot{x}_{TP},$$

де  $\rho_{нов}$  – це щільність повітря;  $S_{нов}$  – площа міделевого перерізу кабіни трактора або цистерни;  $\psi_{нов} \approx 0.4$  – коефіцієнт тертя [19].



Для автомобілів, які рухаються зі швидкостями понад 100 км/год, ці сили є суттєвими, проте при русі МТА зі швидкостями, які не перебільшують 20 км/год, вони є малими, і при розрахунку ними доречно знехтувати.

Таким чином,

- поздовжня сила  $R_x$  у зчпному пристрої, змінами якої під час руху (як це засвідчили графіки, показані на рис. 21) нехтувати неприпустимо;
- а також коефіцієнти в'язкого  $\psi_{TP}$  або сухого  $\psi_T$  тертя (які залежать від змінної швидкості руху трактора і кутових швидкостей зміни нахилу рами трактора та дишла);
- та коефіцієнти  $c_k^p$  пружності поверхневих хвиль у рідині (які залежать від змінної величини вертикального прискорення оболонки цистерни);

послугують тими факторами, які призводять до нелінійності моделі.

**Перспективи подальших досліджень.** Матеріал, наведений у статті, складає теоретичний фундамент для проведення конкретних досліджень машинно-тракторного агрегату з цистерною, як коливальної системи.

Перспективним напрямком розвитку започаткованих досліджень є проведення динамічного аналізу коливань МТА з цистерною у горизонтальній площині, які впливають на безпеку руху. А також вивчення динаміки розгону, гальмування та повороту, і хоча ці процеси не є довготривалими й не призводять до шкідливих наслідків для здоров'я тракториста, але значною мірою впливають на техніко-економічні показники та безпеку руху.

**Висновки.** Проаналізовано конструктивні особливості сільськогосподарських цистерн, які використовуються спільно з колісним трактором при виконанні транспортних робіт.

Наведено лінеаризовану модель пов'язаних поздовжніх коливань колісного трактора з причіп- та напівпричіп-цистернами. Для опису перерозподілу рідини у цистерні використано розроблені раніше аналітичні залежності для характеристик поверхневих хвиль Релея. Модель дозволяє знайти спектр наявних частот вільних механічних коливань у інфразвуковому діапазоні частот, а також проаналізувати відповідні форми взаємопов'язаних рухів елементів, амплітуди яких нормовані за їх вкладом до загальної кінетичної енергії коливань.

За допомогою лінеаризованої моделі встановлено групу низькочастотних власних коливань та створено нелінійну математичну модель, яка дозволяє розрахувати вимушені коливання, що відбуваються під час руху транспортного засобу по прямій дорозі зі складним рельєфом.

Запропоновано для математичного тестування динамічних якостей транспортного засобу описувати рельєф дороги двома гармоніками, які мають, відповідно, велику (у діапазоні декілька сотень метрів) та малу (у діапазоні декілька метрів) довжину хвилі. Розроблено метод визначення довжини хвилі, яка призводить до резонансного збільшення амплітуди коливань рідини у цистерні та сидіння тракториста.

#### Список літератури

1. Леженкин А. Н., Григоренко С. М. Моделирование процесса движения агрегата с переменной массой // Научный вестник ТДАТУ. – Мелітополь, 2012. – Вып. 2. – Т. 2. – С. 80 – 86.
2. Кравченко А. П., Ножченко Е. С., Вершина Г. А., Пилатов А. Ю. Общая методика минимизации функции расхода топлива машинотракторного агрегата с прицепом переменной массы // Вісник СевНТУ. – Севастополь, 2013. – Вып. 143. – С. 215 – 219.
3. Леженкин А. Н., Коломиец С. М. Механико-математические основы анализа движения прицепного уборочного агрегата с переменной массой // Университетская наука. – 2017. – №1 (3). – С. 125 – 130.
4. Шуляк М. Л. Підвищення ефективності експлуатації енергонасиченого трактора в агрегаті з сільськогосподарською машиною змінної маси // Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка. – Харків : ХНТУСГ, 2014. – Вып. 148. – С. 280 – 286.
5. Лебедев А. Т., Артёмов М. П., Шуляк М. Л., Лебедев І. А. Забезпечення стійкості і керованості сільськогосподарських агрегатів із змінною масою // Технічні науки : зб. Наук. Праць ВНАУ. – Вінниця : ВНАУ, 2015. – Вып. 1 (89). – Т. 1. – С. 57 – 62.
6. Колесник І. В., Шуляк М. Л., Шевченко І. О. Визначення керованості транспортного агрегату в залежності від зміни маси вантажу // Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка. – Харків : ХНТУСГ, 2015. – №. 160. – С. 255 – 260.
7. Кулаковский Б. Л. Исследование поведения жидкости в ёмкости автоцистерны в дорожных условиях // Пожарная техника и тушение пожаров. – 1979. – Вып. 18. – С. 10 – 16.
8. Mallikarjunarao C., Fancher P. S. Tank trailer stability analysis // Ann Arbor : Highway Safety Research Institute, 1979. – 153 p.
9. Шимановский А. О., Куземкина Г. М. Динамическая нагруженность конструкции цистерны при торможении // Автомобильный транспорт. – 2006. – № 19. – С. 32 – 34.
10. Гаврилов А. А., Власов Ю. Л., Морозов Н. А. Динамическая модель относительного покоя жидкости в автоцистерне при равномерном движении по криволинейному участку дороги // Вестник ОГУ. – 2014. – №10 (171). – С. 44 – 48.
11. Кожушко А. П. Підвищення техніко-економічних показників колісних тракторів з безступінчастими трансмісіями раціональною зміною параметрів регулювання гідромашин в процесі розгону : автореф. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : спец. 05.22.02 / А.П. Кожушко. – Харків, 2016. – 24 с.
12. Ребров А. Ю., Коробка Т. А., Лахман С. В. Математическая модель дизельного двигателя в безразмерных величинах с учетом его загрузки и подачи топлива // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Транспортне машинобудування. – 2012. – № 19. – С. 31 – 36.
13. Кожушко А. П., Григор'єв О. Л. Математичне моделювання низькочастотних коливань в'язкої рідини в горизонтальній ємності з вільною поверхнею // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 3 (1279). – С. 41 – 51.
14. Кальченко Б. І., Кожушко А. П., Кісельов А. Р. Оцінка плавності руху самохідної машини при впливі нерівностей поверхні // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 56 – 63.
15. Геворкян Ю. Л., Григор'єв А. Л. Основы линейной алгебры и её приложений в технике : учебник. – Харьков : НТУ «ХПІ», 2002. – 542 с.
16. Кожушко А. П. Коливання механічних систем в автомобіле- та тракторобудуванні : навчальний посібник. – Харків : ФОП Панов А.М., 2018. – 316 с.

17. Кальченко Б. І., Ребров О. Ю., Кожушко А. П., Мамонтов А. Г. Плавність руху як складова динаміки трактора : монографія. – Харків : ФОП Панов А.М., 2018. – 164 с.
18. Шевченко С. А., Григорьев А. Л., Степанов М. С. Моделирование пневмосистемы запуска ЖРД при учете теплообмена газа со стенками полостей и уточнении сил, действующих на клапаны регуляторов // Авиационно-космическая техника и технология. – 2015. – № 7 (124). – С. 100 – 110.
19. Кухлинг Х. Справочник по физике. – М. : Мир, 1982. – 520 с.

## References (transliterated)

1. Lezhenkin A. N., Grigorenko S. M. Modelirovanie protsessa dvizheniya agregata s peremennoy massoy [Modeling the process of movement of a unit of variable mass]. *Naukovyy visnyk TDATU* [Scientific herald of TDATU]. Melitopol, 2012, vol. 2, pp. 80–86.
2. Kravchenko A. P., Nozhenko E. S., Vershina G. A., Pilatov A. Yu. Obschaya metodika minimizatsii funktsii raskhoda topliva mashinotraktornogo agregata s pritsepom peremennoy massy [General methodology for minimizing fuel consumption by tractor unit with variable mass trailer]. *Visnyk SevNTU* [Journal of the Sevastopol National Technical University]. Sevastopol, 2013, vol. 143, pp. 215–219.
3. Lezhenkin A. N., Kolomiets S. M. Mekhaniko-matematicheskie osnovy analiza dvizheniya pritsepnogo uborochного агрегата s peremennoy massoy [Mechanical and mathematical foundations of motion analysis of a trailed harvesting unit with variable mass]. *Universitetskaya nauka* [University science]. 2017, vol. 1, pp. 125–130.
4. Shulyak M. L. Pidvyshchennia efektyvnosti ekspluatatsii energonasychenogo traktora v agregati z sil'skogospodars'koiu mashynoyu zminnoyi masy [Improving performance efficiency of power tractors in the unit with variable mass agricultural machines]. *Visnyk Kharkivs'kogo natsional'nogo tekhnichnogo universytetu sil'skogo gospodarstva imeni Petra Vasylenka* [Journal of Petro Vasilenko Kharkov National Technical University of Agriculture]. Kharkiv, KhNTUSG Publ., 2014, vol. 148, pp. 280–286.
5. Lebediev A. T., Artyimov M. P., Shulyak M. L., Lebediev I. A. Zabezpechennia stiykosti i kerovanosti sil'skogospodars'kykh agregativ iz zminnoyi masoyu [Providing stability and controllability of agricultural units of variable weight]. *Tekhnichni nauky : zb. Nauk. Prats' VNAU* [Technical sciences : Col. of Scientific Works of VNUU]. Vinnytsia, VNAU Publ., 2015, vol. 1, pp. 57–62.
6. Kolesnyk I. V., Shulyak M. L., Shevchenko I. O. Vyznachennia kerovanosti transportnogo agregatu v zalezhnosti vid zminy masy vantazhu [Determination of the handling of a transport unit depending on the weight change of the load]. *Visnyk Kharkivs'kogo natsional'nogo tekhnichnogo universytetu sil'skogo gospodarstva imeni Petra Vasylenka* [Journal of Petro Vasilenko Kharkov National Technical University of Agriculture]. Kharkiv, KhNTUSG Publ., 2015, vol. 160, pp. 255–260.
7. Kulakovskiy B. L. Issledovanie povedeniya zhidkosti v emkosti avtotsisterny v dorozhnykh usloviyakh [Investigation of the behavior of fluid in the container tanker on the road]. *Pozharnaya tekhnika i tushenie pozharov* [Fire equipment and fire extinguishing]. 1979, vol. 18, pp. 10–16.
8. Mallikarjunarao C., Fancher P. S. Tank trailer stability analysis. Ann Arbor : Highway Safety Research Institute. 1979. 153 p.
9. Shimanovskiy A. O., Kuzemkina G. M. Dinamicheskaya nagruzhennost' konstruktivnoy tsisterny pri tormozhenii [Dynamic loading of the tank structure during braking]. *Avtomobil'nyy transport* [Automobile transport]. 2006, vol. 19, pp. 32–34.
10. Gavrilov A. A., Vlasov Yu. L., Morozov N. A. Dinamicheskaya model' otноситel'nogo pokoya zhidkosti v avtotsisterny pri ravnomernom dvizhenii po krivolineynomu uchastku dorogi [Dynamic model of relative rest of fluid in a tank truck during uniform motion along a curved section of the road]. *Vestnik OGU* [Bulletin of OGU]. 2014, vol. 10 (171), pp. 44–48.
11. Kozhushko A. P. (2016). *Podvyshchennia tekhniko-ekonomichnykh pokaznykh kolisnykh traktoriv z bezstupinchastymy transmisiyamy ratsional'noy zminoy parametrv reguluvannya gidromashyn v protsesi rozgonu : avtoref. na zdobuttya nauk. stupenya kand. tekhn. nauk : spets. 05.22.02* [Improving technical and economic indicators of wheeled tractors with continuously variable transmission by rational change of regulation parameters of hydromachines during acceleration : Candidate of Science Thesis, spec. 05.22.02]. Kharkiv, 2016. 24 p.
12. Rebrov A. Y., Korobka T. A., Lakhman S. V. Matematicheskaya model' dizel'nogo dvigatelya v bezrazmernykh velichinakh s ucheto ego zagruzki i podachi topliva [Mathematical model of diesel engine in terms of dimensionless quantities accounting for its load and fuel supply]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : *Transtortne mashinobuduvannya* [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series : Transport Engineering]. 2012, vol. 19, pp. 31–36.
13. Kozhushko A. P., Grygoriev A. L. Matematychno modelyuvannya nyz'kochastotnykh kolyvan' v"yazkoyi ridyny v horyzontal'niy yemnosti z vil'noy poverkhneyu [Mathematical modeling of ow-friquency oscillations of viscous fluid in horizontal container with free surface]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : *Matematychno modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2018, vol. 3 (1279), pp. 41–51.
14. Kal'chenko B. I., Kozhushko A. P., Kiselev A. R. Otsinka plavnosti rukhu samokhidnoyi mashyny pry vplyvi nerivnostey poverkhni [Evaluation of smoothness of motion of self-propelled machine when exposed to surface irregularities]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»* [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2017, vol. 30 (1252), pp. 56 – 63.
15. Gevorkyan Yu. L., Grigoriev A. L. *Osnovy lineynoy algebry i eyo prilozheniy v tekhnike : uchebnik* [Fundamentals of linear algebra and its applications in technology : Textbook]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2002. 542 p.
16. Kozhushko A. P. *Kolyvannya mekhanichnykh system v avtomobile- ta traktorobuduvanni : navchal'nyy posibnyk* [Vibrations of mechanical systems in automotive and tractor engineering : tutorial]. Kharkov, FOP Panov A.M. Publ., 2018. 316 p.
17. Kal'chenko B. I., Rebrov A. Y., Kozhushko A. P., Mamontov A. G. *Plavnist' rukhu yak skladova dynamiky traktora : monografiya* [Smoothness of motion as a component of tractor dynamics: monograph]. Kharkov, FOP Panov A.M. Publ., 2018. 164 p.
18. Shevchenko S. A., Grigoriev A. L., Stepanov M. S. Modelirovanie pnevmosistemy zapuska ZhRD pri uchete teploobmena gaza so stenkami polostey i utocnenii sil, deystvuyushchikh na klapan regul'yatorov [Modelling of the LRE pneumatic starting system at taking into account the heat exchange between gas and cavity walls, as well as refinement of the forces acting on the regulator poppets]. *Aviacionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aviation and space equipment and technology]. 2015, no. 7(124), pp. 100–110.
19. Kuchling H. *Spravochnik po fizike* [Handbook of Physics]. Moscow, Mir Publ., 1982. 520 p.

Надійшла (received) 26.10.2018

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Кожушко Андрій Павлович (Кожушко Андрей Павлович, Kozhushko Andriy Pavlovych)** – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: Andreykozhushko7@gmail.com.

**Григор'єв Олександр Львович (Григорьев Александр Львович, Grigoriev Alexander L'vovich)** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.